X Physique A PC 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Rémy Hervé (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Hadrien Vroylandt (ENS Cachan) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Ce sujet est consacré aux voiles solaires, qui sont envisagées comme des moyens de propulsion dans l'espace.

- La première partie est consacrée à l'étude de la pression de rayonnement, qu'elle décrit par deux approches différentes : modèle ondulatoire avec la réflexion d'une onde électromagnétique sur un conducteur, puis modèle corpusculaire avec des rebonds de photons. Cette partie nécessite avant tout de parfaitement connaître et maîtriser le cours d'électromagnétisme et les propriétés des ondes électromagnétiques dans le vide. Pour traiter les dernières questions, il faut aussi avoir des notions sur le modèle statistique de la pression des gaz.
- Dans un deuxième temps, le sujet aborde le problème d'un satellite en orbite autour du Soleil, équipé d'une voile solaire. Faisant essentiellement appel à de la mécanique de première année, c'est l'analyse physique des comportements possibles du satellite qui fait la difficulté de cette partie.
- Enfin, une troisième partie aborde la problématique du maintien d'un satellite à une position fixe par rapport au couple Soleil-Terre. Deux questions sortent du lot : la première par les difficultés de calcul qu'elle pose, nettement supérieures à ce que l'on trouve dans le reste du sujet, et la quatrième par la subtilité de l'analyse physique qu'elle suppose. Des notions fondamentales sur l'optique géométrique et sur les ombres portées sont également requises pour répondre aux dernières questions.

Très révélateur de l'importance qu'accorde l'École Polytechnique aux capacités d'analyse et de raisonnement, ce sujet exigeait des candidats un important recul sur leurs connaissances, en ne laissant qu'une place marginale aux calculs. Confronté à un tel sujet, il peut être judicieux d'investir quelques minutes à retrouver les principaux résultats au brouillon afin de mieux cerner les attentes. Cela ne sera toutefois pas suffisant pour les questions les plus ardues.

Indications

Partie I

I.1 En utilisant les équations demandées et celle de Maxwell-Gauss, montrer que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\,\rho = 0$$

I.4 Dans le contexte du sujet, un conducteur parfait est un milieu dans lequel la densité volumique de charge ρ peut être considérée comme nulle en tout point à tout instant.

I.6 Utiliser l'équation de Maxwell-Ampère pour éliminer le courant volumique $\overrightarrow{\jmath}$.

I.7 On pourra utiliser une analogie avec la force volumique due à la pression dans un fluide à l'équilibre. Choisir une base pour mener les calculs est recommandé.

I.8 Pour un conducteur parfait, la réflexion est totale : la surface du conducteur est alors un nœud pour le champ électrique et un ventre pour le champ magnétique.

I.12 Utiliser la conservation de l'énergie traversant des sphères concentriques autour du Soleil.

I.14 Deux choses sont affectées : la quantité de mouvement apportée par chaque photon à la plaque, ainsi que le débit de photons sur un élément de surface dS de la plaque.

Partie II

II.6 Discuter le signe de l'énergie cinétique du satellite pour $r \to \infty$.

II.10 La transition est d'autant plus rapide que v_r est grand.

Partie III

III.4 La norme et la direction de la pression de rayonnement étant choisies librement (en modifiant σ et α) la seule contrainte sur la force de pression de rayonnement est que sa composante suivant $\overrightarrow{e_x}$ est positive.

III.5 Représenter les rayons partant des bords du Soleil et s'appuyant sur les bords de la Terre.

Le rayonnement solaire pour la navigation spatiale

I. Pression de rayonnement

I.1 En notant ρ, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ respectivement la densité volumique de charge, la densité volumique de courant et le champ électrique dans le conducteur, on a

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\ \overrightarrow{\jmath} = 0} \qquad \text{(conservation de la charge)}$$

et en introduisant la conductivité électrique γ,

$$\boxed{\overrightarrow{\jmath} = \gamma\ \overrightarrow{\mathrm{E}}} \qquad \text{(loi d'Ohm)}$$

Par ailleurs, l'équation de Maxwell-Gauss s'écrit

$$\mathrm{div}\ \overrightarrow{\mathrm{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

avec ε_0 la permittivité diélectrique du vide. Dès lors, en supposant γ uniforme dans le conducteur, il vient

$$\mathrm{div}\ \overrightarrow{\jmath} = \gamma\ \mathrm{div}\ \overrightarrow{\mathrm{E}} = \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\,\rho$$

et donc
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\,\rho = 0$$

Il résulte de cette dernière équation que, s'il existe initialement une densité volumique de charge non nulle en un point du conducteur, celle-ci disparaît, du fait d'une décroissance exponentielle, en un temps caractéristique

$$\boxed{\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}}$$

> Pour un conducteur usuel, on trouve τ allant de 10^{-15} à 10^{-17} seconde.

I.2 En supposant la densité de charge nulle, les équations de Maxwell s'écrivent

$$\boxed{\begin{cases} \mathrm{div}\ \overrightarrow{\mathrm{E}} = 0 \\ \mathrm{div}\ \overrightarrow{\mathrm{B}} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{E}} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{\mathrm{B}}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{B}} = \mu_0\left(\overrightarrow{\jmath} + \varepsilon_0\,\dfrac{\partial \overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t}\right) \end{cases}}$$

I.3 Lorsqu'une onde électromagnétique arrive sur un conducteur, son champ électrique conduit à l'apparition d'un courant volumique dans le milieu (loi d'Ohm). Le courant donne lui-même naissance à un nouveau champ magnétique (loi de Maxwell-Ampère) puis, par induction (loi de Maxwell-Faraday), à un nouveau champ électrique. Ces nouveaux champs se superposent à ceux de l'onde incidente et donnent naissance, dans le milieu d'origine, à une onde réfléchie.

> Cette dernière étape est un effet d'antenne : un conducteur parcouru par un courant sinusoïdal dans une direction transverse à sa surface, émet une onde électromagnétique.

I.4 Le conducteur peut être considéré comme parfait si, dans une bonne approximation, la charge volumique reste nulle en tout point du conducteur. On a montré à la question I.1 que toute charge volumique existante dans le conducteur disparaît sur l'échelle de temps caractéristique $\tau = \varepsilon_0/\gamma$. Lors du passage d'une onde électromagnétique harmonique de pulsation ω, les phénomènes physiques se développent sur un temps caractéristique de l'ordre de la période de l'onde $\mathrm{T} = 2\pi/\omega$. Le conducteur pourra donc être considéré comme parfait si

$$\boxed{\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega} \gg \tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}}$$

Dans le cas d'un conducteur parfait, l'onde incidente est totalement réfléchie. Le champ électrique à la surface du conducteur est alors nul : les champs de l'onde incidente et de l'onde réfléchie sont exactement opposés sur la surface. Pour le champ magnétique en revanche, les champs de l'onde incidente et de l'onde réfléchie sont égaux sur la surface : le champ magnétique total est le double du champ incident.

> Notons que la notion de « conducteur parfait » utilisée par l'énoncé est un peu inhabituelle. Le plus souvent, les conducteurs qualifiés de parfaits sont ceux pour lesquels la conductivité est infinie. L'énoncé s'avère même ambigu puisque les propriétés que l'on énonce dans la suite de cette question sont effectivement celles d'un supraconducteur, alors que, dans la suite du sujet, c'est bien un conducteur de conductivité finie que l'on considère.
>
> Rigoureusement, le critère mentionné ne suffit pas pour avoir ces résultats. En plus de celui-ci, il faudrait normalement comparer la profondeur de pénétration δ de l'onde électromagnétique dans le conducteur à l'épaisseur e du conducteur. Si δ est très petit devant e, on obtient bien ces résultats. Sinon, il existe une onde transmise dans le conducteur et l'onde réfléchie a une amplitude plus faible.

I.5 Pour une onde harmonique de pulsation ω dont le champ électrique a une amplitude E_0, l'ordre de grandeur du courant de déplacement, qui intervient dans l'équation de Maxwell-Ampère, est

$$j_\mathrm{D} = \varepsilon_0 \left\| \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t} \right\| \sim \varepsilon_0\, \omega\, \mathrm{E}_0$$

tandis que pour le courant de conduction

$$j \sim \gamma \mathrm{E}_0$$