Centrale Physique 2 PC 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Louis Salkin (ENS Cachan) ; il a été relu par Anne Mounier (ENS Lyon) et Vincent Freulon (ENS Ulm).

Cette épreuve porte sur le comportement de milieux diélectriques soumis à des ondes électromagnétiques.

- La première partie propose d'étudier la polarisation d'un milieu diélectrique soumis à une onde électromagnétique. On s'interroge alors sur deux effets dus aux propriétés des diélectriques : pourquoi l'eau est-elle un bon solvant pour les composés ioniques ? Pourquoi introduire un matériau diélectrique entre les armatures d'un condensateur ?
- Après avoir redémontré la loi de Cauchy, on traite dans la deuxième partie d'une illustration frappante de celle-ci, l'arc-en-ciel. Les réflexions multiples des rayons lumineux dans des gouttes d'eau, traitées dans le cadre de l'optique géométrique, permettent d'expliquer le phénomène. Puis on s'attache à comprendre l'origine des « arcs surnuméraires » à l'aide de l'optique ondulatoire et du cours sur les interférences.
- Enfin, la troisième partie développe, dans un premier temps, le principe d'un capteur d'empreintes digitales, système astucieux qui repose sur la « réflexion totale frustrée ». Dans un second temps, c'est l'effet Goos-Hänchen qui est étudié. Il s'agit alors de regarder finement ce qui se passe au niveau de l'interface lors d'une réflexion totale.

Le sujet est de difficulté croissante. Si la première partie est un classique du chapitre d'électromagnétisme dans les milieux et présente peu de difficultés, les deuxième et troisième parties sont, elles, plus originales ; riches en calculs, elles font également la part belle au sens physique.

Indications

Partie I

B.5 Effectuer un développement limité de la relation précédente.

Partie II

A L'énoncé comporte une erreur : exprimer l'indice en fonction de χ_0 et λ_0.

B.2 Décomposer le trajet du rayon lumineux et ses angles de déviation successifs.

B.3 La dérivée de la fonction arcsinus vaut $f'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.

B.4 L'existence d'un minimum de déviation engendre une accumulation de lumière dans une direction préférentielle.

B.6.c Déduire de l'angle de déviation D la plage angulaire sous laquelle les rayons sont réfléchis depuis l'observateur.

C.1 Une réflexion d'un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent induit un déphasage de π.

Partie III

A.6.a Écrire l'équation d'onde vérifiée par le champ électrique transmis.

A.7 Déterminer le champ magnétique transmis, puis appliquer à nouveau les conditions de passage du champ électromagnétique au niveau du dioptre.

B.1.b Exploiter la relation entre δ et λ_0 déterminée à la question III.A.6.a.

C.1 Repasser les champs électrique et magnétique en notation réelle, puis calculer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting.

C.3.a Développer le déphasage φ en série de Taylor à l'ordre 1, et procéder par identification avec la forme proposée.

Les diélectriques dans la nature et au laboratoire

I. Propriétés générales des diélectriques

I.A Le modèle de l'électron élastiquement lié

I.A.1 L'électron est soumis au champ électrique créé par le noyau et les éventuels autres électrons de l'atome. **Lorsque l'électron se déplace dans ce champ, il s'exerce sur lui une force de rappel, rendant compte de manière phénoménologique de son caractère *lié*.** Il est possible de développer l'énergie potentielle $\mathrm{E_p(R)}$ associée à cette force au voisinage de la position d'équilibre de l'électron située en $\mathrm{R = R_0}$. En se limitant à l'ordre 2, il vient

$$\mathrm{E_p(R) \simeq E_p(R_0) + \frac{E_p''(R_0)(R - R_0)^2}{2}}$$

car $\mathrm{E_p'(R_0) = 0}$ (position d'équilibre). Par choix de l'origine des énergies potentielles, ce résultat peut se réécrire comme

$$\mathrm{E_p(R) \simeq \frac{E_p''(R_0)(R - R_0)^2}{2}}$$

Cette énergie potentielle correspond à celle d'un ressort, et par dérivation à une force élastique de la forme $\overrightarrow{\mathrm{F_r}} = -k\,\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

> L'énoncé comporte une erreur : dans le cadre du modèle de l'électron élastiquement lié, le point O correspond à la position d'équilibre de l'électron, et non la position du noyau.

La force de frottement *fluide*, de la forme $\overrightarrow{\mathrm{F_f}} = -\alpha\,\overrightarrow{v}$, tient compte de **diverses causes de dissipation d'énergie au cours de son mouvement, parmi lesquelles le rayonnement dipolaire**.

> Au vu des résultats obtenus sur le rayonnement dipolaire (formule de Larmor), il serait plus rigoureux de choisir une force de frottement proportionnelle à l'accélération de l'électron. Néanmoins, le calcul montre que l'on peut se ramener, dans un certain cadre d'approximation, à un frottement simplifié de type fluide.

I.A.2 Le champ électromagnétique de l'onde plane monochromatique satisfait à l'équation de Maxwell-Faraday

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{B}}}{\partial t}$$

Notons respectivement ω et $\overrightarrow{\kappa}$ la pulsation et le vecteur d'onde associés à cette onde plane. En introduisant dans l'équation précédente les champs exprimés à l'aide de la notation complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \overrightarrow{\kappa}\cdot\overrightarrow{r})}$, on obtient la relation

$$\overrightarrow{\mathrm{B}} = \frac{\overrightarrow{\kappa} \wedge \overrightarrow{\mathrm{E}}}{\omega}$$

Ce résultat montre que les modules des champs magnétique B et électrique E vérifient la relation $\mathrm{B} = \mathrm{E}/c$, avec $c = \omega/\kappa$ la vitesse de la lumière dans le vide. En calculant le rapport des composantes magnétique et électrique de la force de Lorentz, il vient

$$\frac{\mathrm{F_m}}{\mathrm{F_e}} = \frac{ev\mathrm{B}}{e\mathrm{E}} = \frac{v}{c}$$

En supposant les électrons non relativistes ($v \ll c$), **il est alors raisonnable de négliger la force magnétique $-e\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}$ devant la force électrique $-e\,\overrightarrow{\mathrm{E}}$.**

I.A.3.a Notons λ la longueur d'onde dans le vide de l'onde électromagnétique et a la taille typique de l'atome. Le champ électrique $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ peut être considéré comme uniforme à l'échelle de l'atome si

$$\lambda \gg a$$

Pour une taille atomique $a \simeq 0{,}1$ nm, cette condition est vérifiée si

$$\boxed{\lambda \gg 10^{-10}\ \mathrm{m}} \qquad \text{(dans le vide)}$$

I.A.3.b Appliquons le principe fondamental de la dynamique à l'électron dans le référentiel galiléen lié au noyau atomique

$$m_\mathrm{e}\,\ddot{\overrightarrow{\mathrm{R}}} = -\alpha\,\dot{\overrightarrow{\mathrm{R}}} - k\,\overrightarrow{\mathrm{R}} - e\overrightarrow{\mathrm{E}_0}\cos\omega t$$

Le forçage sinusoïdal imposé par le champ électrique suggère d'utiliser les notations complexes, avec

$$\dot{\underline{\overrightarrow{\mathrm{R}}}} = \mathrm{j}\omega\,\underline{\overrightarrow{\mathrm{R}}} \qquad \text{et} \qquad \ddot{\underline{\overrightarrow{\mathrm{R}}}} = -\omega^2\,\underline{\overrightarrow{\mathrm{R}}}$$

Il vient

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{\mathrm{R}}} = \frac{-e}{k - m_\mathrm{e}\omega^2 + \mathrm{j}\alpha\omega}\,\overrightarrow{\mathrm{E}_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}$$

I.A.3.c Le moment dipolaire $\underline{\overrightarrow{p}}$ de l'atome, induit par la présence du champ électrique s'écrit

$$\underline{\overrightarrow{p}} = -e\,\underline{\overrightarrow{\mathrm{R}}}$$

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{p}} = \frac{e^2}{k - m_\mathrm{e}\omega^2 + \mathrm{j}\alpha\omega}\,\overrightarrow{\mathrm{E}_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}$$

> Notons qu'en l'absence de champ électrique, le moment dipolaire s'annule. Ce modèle ne s'applique donc pas aux milieux possédant un moment dipolaire permanent. L'eau en est un exemple, sa polarisation naturelle ($p \approx 6 \cdot 10^{-30}$ C.m) provenant de la forme coudée de la molécule $\mathrm{H_2O}$, selon la théorie VSEPR, et de la différence d'électronégativité entre H et O.

Le vecteur polarisation $\underline{\overrightarrow{\mathrm{P}}}$ s'interprète comme le moment dipolaire moyen par unité de volume. Il s'exprime donc comme

$$\underline{\overrightarrow{\mathrm{P}}} = n^*\,\underline{\overrightarrow{p}}$$

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{\mathrm{P}}} = \frac{n^* e^2}{k - m_\mathrm{e}\omega^2 + \mathrm{j}\alpha\omega}\,\overrightarrow{\mathrm{E}_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}$$