Mines Maths 2 PC 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Antoine Sihrener (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Christophe Fiszka (ENS Cachan) et Gilbert Monna (Professeur en CPGE).

Ce sujet a pour but d'étudier le rayon de Bohr d'une série entière, défini de la manière suivante :

« Soient les deux fonctions f et h définies respectivement par les séries entières

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_n z^n \qquad \text{et} \qquad h(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} |b_n||z|^n$$

Si le rayon de convergence de f est supérieur ou égal à 1 et si $|f|$ est inférieur ou égal à 1 sur la boule ouverte de centre O de rayon 1, le rayon de Bohr de la série entière est le plus grand réel ρ tel que $h(z) \leqslant 1$ pour tout $|z| \leqslant \rho$. »

- La première partie étudie le problème sous une hypothèse plus forte : le terme constant de f est supposé réel positif. On suppose de plus la partie réelle de f majorée par 1 sur le disque de centre O de rayon 1. On montre enfin que le rayon de Bohr de la fonction f est $1/3$.
- La deuxième partie se replace dans le cas général et n'utilise que les deux hypothèses données dans le préambule. On montre que l'on peut se ramener à la partie précédente avec une rotation bien choisie et on termine avec le fait que la constante $1/3$ est optimale en étudiant une famille de fonctions dépendant d'un paramètre.
- La troisième partie utilise des résultats d'algèbre linéaire (assez peu cependant, l'analyse est vraiment le thème général de cette épreuve) pour généraliser le résultat de la partie précédente : le module de z est pris quelconque inférieur à 1 et on borne h par une fonction m. On montre que $m(|z|) = 1$ si $|z| \leqslant 1/3$, ce qui est bien une généralisation des parties précédentes.

Les questions de la première partie sont assez techniques et les calculs de sommes peuvent prendre beaucoup de temps. Il faut de plus faire attention à bien justifier les interversions de sommes et d'intégrales, omniprésentes. La deuxième partie est un peu moins technique que la précédente, mais les premières questions sont assez difficiles sans indication, et indispensables pour traiter les questions suivantes, plus faciles. Les questions présentes dans la troisième partie demandent moins de rédaction que celles des deux premières, et certaines sont d'un niveau très abordable. Par contre, la dernière question demande beaucoup de rédaction et une certaine culture mathématique. Néanmoins, peu de candidats ont dû arriver jusque là.

En conclusion, c'est un problème intéressant qui approfondit de manière exhaustive la notion de rayon de Bohr, mais il est assez long (surtout pour une épreuve de trois heures), assez difficile, et on peut regretter que les questions plus abordables soient à la fin de l'épreuve. Il pourra cependant être utilisé avec profit pendant l'année pour vérifier que les hypothèses des théorèmes d'analyse sont connues, et pour devenir vraiment à l'aise avec le maniement des sommes.

Indications

Partie I

1 Penser à intervertir la somme et l'intégrale et à distinguer les cas selon les valeurs de k.

2 Appliquer la question précédente.

4 Voir le cosinus comme une partie réelle, se souvenir que pour tout réel λ et tout complexe z, $\lambda\mathfrak{Re}(z) = \mathfrak{Re}(\lambda z)$ et intervertir la somme et l'intégrale !

5 Minorer $\tau^n \cos(n\theta + \varphi_n)$ par $-1/3^n$. Pour la deuxième partie, se souvenir que si f est positive, $|f| = f$.

6 Ne pas oublier que dans la question précédente, $r \in \left]\,0\,;1\,\right[$ et $\tau \in \left]\,0\,;1/3\,\right]$ et regarder les cas limites.

Partie 2

7 Se ramener à une fonction h vérifiant (H1), (H2) et (H3) à l'aide d'une rotation pour éliminer l'argument de b_0.

8 Pour (H1), développer f_λ en série entière. Pour (H4), poser $z = a + ib$.

9 Étudier les variations sur $\left[\,0\,;1/\lambda\,\right[$ de

$$\varphi : x \mapsto \lambda + \frac{(1-\lambda^2)x}{1-\lambda x}$$

Partie 3

12 Appliquer le résultat sur le produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes.

13 Appliquer la question précédente avec $f = g$.

14 Comparer $|\mathrm{A}_f(\psi)|$ et $|\psi|$ et utiliser la relation entre la série et l'intégrale de la question 12. Comparer ensuite $|||\mathrm{P}_n(g)|||$ et $|||g|||$ pour g vérifiant (H1).

17 Calculer explicitement $|||\mathrm{P}_n \circ \mathrm{A}_f(\psi)|||$ et $|||\psi|||$.

18 Diagonaliser $\mathbb{A}$, calculer son déterminant et factoriser pour en déduire que les quantités $1 - {b_0}^2 - b_n$ et $1 - {b_0}^2 + b_n$ sont de même signe.

19 Majorer $|b_n|$ par $1 - {b_0}^2$.

20 Voir où la fonction φ_r définie sur $[\,0\,;1\,]$ par

$$\varphi_r(t) = t + (1-t^2)\frac{r}{1-r}$$

atteint sont maximum. Ne pas oublier de vérifier s'il est atteint sur $[\,0\,;1\,]$.

21 Supposer que $|z| < 1 - \varepsilon$ et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur un espace bien choisi, puis reconnaître $|||f|||$ et prendre la borne inférieure sur ε.

1. Séries entières

1 Soit $n \in \mathbb{Z}$. Notons $\widehat{\mathrm{H}_r}(n)$ le coefficient de Fourier d'ordre n de H_r et $\widehat{\overline{\mathrm{H}_r}}(n)$ le coefficient de Fourier d'ordre n de $\overline{\mathrm{H}_r}$. Alors,

$$\widehat{\mathrm{H}_r}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{H}_r(\theta)e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k e^{i(k-n)\theta}\right)\mathrm{d}\theta$$

Il s'agit maintenant d'intervertir la somme et l'intégrale. Appliquons le théorème d'interversion série/intégrale sur un segment. Définissons, pour tout k appartenant à $\mathbb{N}$, la fonction U_k par $\mathrm{U}_k(\theta) = a_k r^k e^{i(k-n)\theta}$.

- U_k est continue sur $[\,-\pi\,;\pi\,]$ pour tout k.
- Par hypothèse, h vérifie (H_1). En conséquence, la série numérique $\sum a_k r^k$ converge absolument puisque $r < 1$, et comme on a $|\mathrm{U}_k(\theta)| \leqslant |a_k| r^k$ pour tout $\theta \in [\,-\pi\,;\pi\,]$, il vient $||\mathrm{U}_k||_\infty \leqslant |a_k| r^k$. Cela assure la convergence normale de la série de fonctions $\sum \mathrm{U}_k$ sur l'intervalle $[\,-\pi\,;\pi\,]$.

On peut par conséquent intervertir la somme et l'intégrale :

$$\widehat{\mathrm{H}_r}(n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} a_k r^k e^{i(k-n)\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)\theta}\mathrm{d}\theta$$

- Si $k = n$ $$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)\theta}\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} 1\mathrm{d}\theta = 2\pi$$
- Si $k \neq n$ $$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)\theta}\mathrm{d}\theta = \left[\frac{e^{i(k-n)\theta}}{k-n}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{i(k-n)\pi} - e^{-i(k-n)\pi}}{k-n} = 0$$

> Pour écrire cela de façon moins fastidieuse, on utilise le symbole de Kronecker : on rappelle que $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon. Ce qui précède peut ainsi être écrit sous la forme plus synthétique suivante :
>
> $$\int_{-\pi}^{\pi} a_k r^k e^{i(k-n)\theta}\mathrm{d}\theta = \delta_{kn} 2\pi a_n r^n$$
>
> On utilisera cette notation dans la suite.

En particulier, si $n < 0$, k est toujours différent de n, et par suite toutes les intégrales sont nulles. Il vient

$$\boxed{\forall n < 0 \qquad \widehat{\mathrm{H}_r}(n) = 0}$$

Si $n \geqslant 0$, il ne reste plus que le terme de la somme pour $k = n$, qui vaut $2\pi a_n r^n$, ce qui donne, en n'oubliant pas le $1/2\pi$ au début de l'expression,

$$\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad \widehat{\mathrm{H}_r}(n) = a_n r^n}$$

Calculons maintenant le coefficient de Fourier d'ordre n de $\overline{\mathrm{H}_r}$. Il est donné par

$$\widehat{\overline{\mathrm{H}_r}}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{\mathrm{H}_r}(\theta)e^{-in\theta}(\theta)\mathrm{d}\theta$$

Prouvons que $\widehat{\overline{\mathrm{H}_r}}(n) = \overline{\widehat{\mathrm{H}_r}(-n)}$. En effet,

$$\widehat{\overline{\mathrm{H}_r}}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{\mathrm{H}_r}(\theta) e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{\mathrm{H}_r(\theta) e^{in\theta}}\mathrm{d}\theta = \overline{\widehat{\mathrm{H}_r}(-n)}$$

ce qui permet de conclure que

$$\boxed{\forall n > 0 \qquad \widehat{\overline{\mathrm{H}_r}}(n) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \leqslant 0 \qquad \widehat{\overline{\mathrm{H}_r}}(n) = \overline{a_{-n}}\, r^{-n}}$$

> Il ne fallait pas confondre les a_n avec les coefficients de Fourier réels : ceux de l'énoncé sont a priori complexes et par suite il ne fallait pas oublier de les conjuguer aussi.

2 Notons I_n, pour n appartenant à $\mathbb{Z}$ quelconque, l'intégrale suivante :

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{Re}\left(h\left(re^{i\theta}\right)\right) e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta$$

Comme $\mathfrak{Re}(z) = (z + \overline{z})/2$,

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathrm{H}_r(\theta) + \overline{\mathrm{H}_r}(\theta)\right) e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta$$

et en utilisant les notations de la question précédente il vient

$$\mathrm{I}_n = \widehat{\overline{\mathrm{H}_r}}(n) + \widehat{\mathrm{H}_r}(n)$$

Il y a ainsi trois cas à distinguer :

$$\boxed{\begin{cases} \mathrm{I}_0 = a_0 + \overline{a_0} = 2\mathfrak{Re}(a_0) \\ \forall n > 0 \qquad \mathrm{I}_n = a_n r^n \\ \forall n < 0 \qquad \mathrm{I}_n = \overline{a_{-n}}\, r^{-n} \end{cases}}$$

3 D'après la question précédente,

$$\mathrm{I}_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{Re}\left(h\left(re^{i\theta}\right)\right)\mathrm{d}\theta = 2\mathfrak{Re}(a_0)$$

Comme h vérifie l'hypothèse (H2), a_0 est réel, et par suite $2\mathfrak{Re}(a_0) = 2a_0$. Ainsi,

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{Re}\left(h\left(re^{i\theta}\right)\right)\mathrm{d}\theta}$$

4 Montrons tout d'abord que l'intégrale de droite a un sens (on partira ensuite de cette intégrale pour arriver au membre de gauche).

- Il faut montrer que la série de fonctions du membre de droite converge bien, pour que l'intégrande soit bien défini.
- Il suffit ensuite de montrer que cette même série converge normalement sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ et qu'elle y définit une fonction continue ; l'intégrale sera ainsi bien définie car on aura une fonction continue sur un compact.

Pour tout n supérieur ou égal à 1, notons U_n la fonction définie sur $[-\pi\,;\pi]$ par

$$\mathrm{U}_n(\theta) = \tau^n \cos(n\theta + \varphi_n)$$