Centrale Maths 1 PC 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Pauline Tan (ENS Cachan) ; il a été relu par Samuel Baumard (ENS Ulm) et Guillaume Batog (Professeur en CPGE).

Cette épreuve porte principalement sur l'étude de l'intégrale dépendant d'un paramètre, appelée *intégrale de Poisson*,

$$\int_0^\pi \ln(x^2 - 2\,x\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta$$

pour laquelle on propose trois méthodes de calcul différentes.

- La première partie commence par établir la règle de convergence d'Abel, qui permet de prouver la convergence de la série $\sum \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,n\theta}/n$. Ce résultat sera utilisé à plusieurs reprises par la suite. Il est suivi de deux exercices d'application.
- La deuxième partie est consacrée à l'étude de la série entière $\sum \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,n\theta} x^n/n$, dont on exprime la somme g à l'aide de fonctions usuelles, notamment $g(1)$.
- La troisième partie de ce problème met en œuvre trois méthodes pour calculer l'intégrale de Poisson, avec successivement des séries de Fourier, une intégrale dépendant d'un paramètre puis les racines de l'unité.
- Enfin, une quatrième partie établit le théorème de convergence radiale et propose deux exercices d'application. Ce théorème établit la continuité en 1 de la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon 1 telle que la série $\sum a_n$ converge.

Ce sujet couvre une large partie du programme d'analyse de deuxième année, puisque sont utilisés les résultats concernant les séries de fonctions, les séries de Fourier et les séries entières, mais aussi les intégrales dépendant d'un paramètre et les intégrales impropres. Il nécessite par ailleurs une bonne maîtrise des formules de trigonométrie et des changements de variable. C'est un problème relativement long mais bien balisé. En particulier, les titres des parties et des sous-parties guidaient le candidat sur les connaissances à mobiliser. Toutefois, la progression n'est pas linéaire : certains résultats ne sont que des applications de résultats préliminaires et ne sont pas réutilisés par la suite. En outre, le même résultat est démontré dans trois sous-parties indépendantes, ce qui pouvait surprendre, voire désorienter.

Indications

I Règle de convergence d'Abel

I.A.2 Utiliser le fait qu'une série absolument convergente est convergente.

I.B.1 Écrire $\sin\theta$ comme une somme d'exponentielles complexes.

I.C.1 Remarquer la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série.

I.C.3 Raisonner par l'absurde en appliquant le théorème de Parseval à la dérivée de p.

II Étude de la série entière $\sum \dfrac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,n\theta}}{n}\,x^n$

II.A.2.b Montrer que h' et g' coïncident sur $]-1\,;1\,[$.

II.B.1 Reconnaître dans l'intégrale la somme des premiers termes d'une suite géométrique.

II.B.3 Reconnaître dans l'intégrale du résultat de la question II.A.2.b l'expression de g'.

II.B.4 Voir le sinus comme une partie imaginaire.

II.C.3 Appliquer le théorème de Parseval puis séparer les termes pairs et les termes impairs dans $\sum 1/n^2$.

III Calcul de $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2\,x\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta$

III.A.3 Écrire la différence sous forme d'une intégrale puis encadrer cette intégrale.

III.B.2 Pour le cas où $|x| > 1$, factoriser par x^2 dans le logarithme et se ramener au cas précédent.

III.B.6 Commencer par prouver la première égalité (grâce la question II.A.4) puis démontrer que la somme est nulle.

III.C.2 Effectuer le changement de variable $t = \tan(\theta/2)$.

III.C.3 Réduire au même dénominateur puis multiplier toute l'égalité par ce dénominateur pour ramener le problème à une décomposition dans une base de $\mathbb{C}_1[\mathrm{X}]$.

III.C.4 Utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité. Pour appliquer le théorème de convergence dominée, distinguer le cas où on peut utiliser l'indication de l'énoncé et le cas où on peut majorer par une constante.

III.D.1 Reconnaître une somme de Riemann.

III.D.2 Faire apparaître les racines n-ièmes de l'unité en factorisant les polynômes du second degré.

III.D.4 Utiliser la question III.D.2 pour $x \neq 1$ et conclure par continuité.

III.D.6 Utiliser la question III.D.5 avec $x = 1$. Exprimer alors $\sin(4\theta)$ en fonction de $\sin\theta$ et de $\cos\theta$ puis établir que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

pour pouvoir utiliser la question III.D.4.

III.D.7 Écrire pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![1\,;\, n-1]\!]$ un encadrement de l'intégrale

$$\int_{k\pi/(2n)}^{(k+1)\pi/(2n)} \ln(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

IV Théorème de convergence radiale

IV.A.2 Remarquer que $a_k = r_{k-1} - r_k$ pour tout $k \geqslant 1$.

IV.A.4 Appliquer le résultat de la question IV.A.3 à la suite $(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,n\theta}/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

IV.B Factoriser le dénominateur pour utiliser les développements en série entière des fonctions usuelles.

IV.C.1 Utiliser le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions normalement convergente.

IV.C.2 Appliquer le résultat démontré à la question IV.A.3 en utilisant le théorème de Dirichlet.

I. Règle de convergence d'Abel

I.A.1 On remarque que $B_1 = b_1$ et que $b_k = B_k - B_{k-1}$ pour tout $k \geqslant 2$. Il en résulte que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= a_1\, b_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k b_k \\
&= a_1\, B_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) \\
&= a_1\, B_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k B_k - \sum_{k=2}^{n} a_k B_{k-1} \\
&= a_1\, B_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}\, B_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}\, B_k \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} a_k B_k + a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}\, B_k
\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1})\, B_k}$$

La transformation d'Abel peut être rapprochée de l'intégration par parties. En effet, l'analogue discret de l'intégration est la sommation, tandis que la dérivation est discrétisée comme une différence finie.

Ainsi, par exemple, pour calculer l'intégrale sur un segment $[\,0\,;X\,]$ d'un produit de fonctions $f\,g$ définies sur cet intervalle (avec f supposée dérivable), l'intégration par parties consiste à évaluer le produit de la fonction f avec une primitive G de la fonction g aux bornes 0 et X dans un crochet d'intégration et à soustraire l'intégrale sur $[\,0\,;X\,]$ du produit $f'\,G$:

$$\int_0^X f(t)\, g(t)\, dt = f(X)\, G(X) - f(0)\, G(0) - \int_0^X f'(t)\, G(t)\, dt$$

où une primitive G et la dérivée f' peuvent s'écrire, pour tout $x \in [\,0\,;X\,]$,

$$G(x) = \int_0^x g(t)\, dt \qquad \text{et} \qquad f'(x) = \lim_{\substack{h>0 \\ h\to 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La transformation d'Abel réalise l'opération analogue pour les suites. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ devient $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (ce qui correspond à une discrétisation de la dérivation avec un pas $h = 1$) tandis que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommée pour obtenir $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $B_n = b_1 + \cdots + b_n$ pour tout $n \geqslant 1$ (noter l'analogie avec l'expression de G). En posant $a_0 = b_0 = B_0 = 0$, le résultat démontré à la question I.A.1 devient

$$\sum_{k=0}^{n} a_k B_k = a_n B_n - a_0\, B_0 - \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\, B_k$$

ce qui est, au décalage des bornes supérieures des sommes près, la formulation discrète de l'intégration par parties.