CCP Maths 2 PC 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Pierre-Yves Bienvenu (ENS Ulm), il a été relu par Pauline Tan (ENS Cachan) et Guillaume Batog (Professeur en CPGE).

Ce sujet d'analyse, composé de trois parties largement indépendantes, propose d'étudier des intégrales impropres, des suites d'intégrales et des séries de fonctions, notamment des intégrales de la forme $\displaystyle\int f(t^n)\,\mathrm{d}t$ ou des séries de la forme $\sum f(x^n)$.

- La première partie, intitulée « calculs préliminaires », établit notamment le résultat célèbre

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

  grâce à la fonction $\qquad \mathrm{L}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t$

  via le calcul de sa dérivée seconde. On montre aussi que

$$\int_0^1 \frac{\ln u}{u-1}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi^2}{6}$$

  en intégrant terme à terme un développement en série de l'intégrande.

- Dans la deuxième partie, on applique inlassablement le théorème de convergence dominée pour donner des limites ou des équivalents à des suites d'intégrales, en particulier à

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^n)\,\mathrm{d}x$$

- La troisième partie est consacrée à l'étude de séries de la forme $\sum f(x^n)$ et à leurs limites en 1. Les outils mis en œuvre sont les théorèmes sur les séries de fonctions : exploitation de la convergence normale pour intégrer, dériver, calculer des limites. La dernière question est extraordinairement difficile.

Il n'est pas envisageable de terminer cette épreuve en moins de quatre heures. Typique des CCP, répétitive, peu inventive, cette épreuve vous permettra de revoir les principaux théorèmes d'analyse.

Indications

Partie I

I.1.3 Prendre comme primitive du sinus la fonction $1 - \cos$.

I.2.2 Appliquer soigneusement le théorème de dérivation sous le signe somme. Les hypothèses doivent être méticuleusement vérifiées.

I.2.5 Trouver L' comme primitive de L'' obtenue à la question II.2.4 ; puis pour L, pratiquer une intégration par parties. Attention aux constantes d'intégration. Remarquer que $\mathrm{K} = \mathrm{L}(0)$.

I.3.3 Développer en série entière $1/(1-u)$ et appliquer un théorème convenable d'interversion sommation-intégration.

Partie II

II.2.2 Sur un segment $[\,\eta\,;1\,]$, faire le changement de variable $u = t^n$.

II.2.3 Poser à nouveau $u = t^n$.

II.3.1 Poser encore et toujours $u = t^n$!

II.4.3 Décomposer l'intégrale sur $[\,0\,;+\infty\,[$ en une intégrale sur $[\,0\,;1\,]$ et une intégrale sur $[\,1\,;+\infty\,[$. Pour la première intégrale, utiliser la question II.2.3. Pour la seconde, utiliser la question II.4.2.

Partie III

III.2.2 Pour étudier $(1-x)\,\mathrm{F}(x)$, injecter l'inégalité dans la série et reconnaître un développement en série entière célèbre.

III.3.1 Poser $u = x^t$.

III.3.4 Multiplier par $1 - x$ l'encadrement de la question III.3.3 et étudier les deux termes extrêmes au voisinage de 1.

III.4.2 Vérifier soigneusement les hypothèses qui président à la sous-partie III.3 et appliquer sa conclusion. Faire un changement de variable $t = u - 1$.

III.4.3 Très difficile. Écrire d'abord des encadrements comme en III.3, les intégrer, les sommer, et analyser le comportement des majorants et minorants pour obtenir la convergence.

I. Calculs préliminaires

I.1.1 La fonction $$f : t \longmapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$$

est définie et continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Établissons qu'elle est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ et sur $[\,1\,;+\infty\,[$.

- Rappelons le développement limité de cosinus en 0
$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)$$
On en déduit l'équivalent $\quad 1-\cos t \sim \dfrac{t^2}{2}$

  donc f tend vers $1/2$ en 0. La fonction est ainsi prolongeable par continuité sur le segment $[\,0\,;1\,]$ et, par conséquent, intégrable sur $]\,0\,;1\,]$.
- D'autre part, sachant que pour $t \in \mathbb{R}$
$$|1-\cos t| \leqslant 1 + |\cos t| \leqslant 2$$
on a $f(t) = \mathrm{O}\left(1/t^2\right)$ quand t tend vers $+\infty$, d'où l'intégrabilité sur $[\,1\,;+\infty\,[$ d'après le critère de Riemann.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \mathrm{K} = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ existe.}}$$

> Rappelons qu'une fonction continue sur un intervalle de la forme $]\,a\,;b\,]$ qui admet une limite finie en a fini est intégrable sur $]\,a\,;b\,]$. On dit que l'intégrale est faussement impropre. Il faut savoir les repérer au premier coup d'œil.

I.1.2 Soit $\mathrm{A} > 0$. La fonction $t \longmapsto t^{-1}\sin t$ est continue sur $]\,0\,;\mathrm{A}\,]$ et tend vers 1 en 0, de sorte que la fonction est prolongeable par continuité sur le segment $[\,0\,;\mathrm{A}\,]$. Ainsi,

$$\boxed{\text{L'intégrale } \mathrm{D(A)} = \int_0^{\mathrm{A}} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ est définie pour tout } \mathrm{A} > 0.}$$

I.1.3 Prenons $\varepsilon > 0$. Les fonctions sinus et inverse sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,\varepsilon\,;\mathrm{A}\,]$. En choisissant comme primitive du sinus la fonction $t \longmapsto 1-\cos t$, l'intégration par parties fournit :

$$\int_\varepsilon^{\mathrm{A}} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_\varepsilon^{\mathrm{A}} + \int_\varepsilon^{\mathrm{A}} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or, à cause du développement limité du cosinus en 0,

$$\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \frac{\varepsilon}{2} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

donc en faisant tendre ε vers 0 dans les deux membres de l'égalité de l'intégration par parties, on obtient :

$$\mathrm{D(A)} = \frac{1-\cos\mathrm{A}}{\mathrm{A}} + \int_0^{\mathrm{A}} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \textbf{(E)}$$

Faisons à présent tendre A vers $+\infty$. Le premier terme tend vers 0 puisque $1-\cos \mathrm{A}$ est borné. Quant au deuxième terme, il tend vers K d'après la première question. Il vient

$$\boxed{\lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \mathrm{D}(\mathrm{A}) = \mathrm{K}}$$

> Ici, une rédaction propre passe obligatoirement par l'introduction d'un ε afin de faire l'intégration par parties sur un segment où les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$, puis un passage à la limite en deux temps.

I.2.1 Définissons une fonction h par

$$h\colon \begin{cases} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{e}^{-tx} \end{cases}$$

Alors :

- l'application $x \longmapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ quel que soit $t\in\mathbb{R}_+^*$;
- l'application $t \longmapsto h(x,t)$ est continue donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ quel que soit $x\in\mathbb{R}_+$;
- on a la majoration suivante uniforme en x :

$$\forall x \geqslant 0 \quad \forall t>0 \qquad |h(x,t)| \leqslant \frac{1-\cos t}{t^2} = f(t)$$

  et f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question I.1.1.

À l'aide du théorème de continuité sous le signe intégrale, on en déduit que

$$\boxed{\text{La fonction L est continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

I.2.2 Soit $a>0$. Reprenons la notation h de la question précédente.

- L'application $x \longmapsto h(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ quel que soit t, de dérivées première et seconde

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -\frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{e}^{-tx} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = (1-\cos t)\,\mathrm{e}^{-tx}$$

- Pour $x\geqslant a$, les applications $t\longmapsto h(x,t)$ et $t\longmapsto \partial h/\partial x\,(x,t)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ à cause des majorations suivantes par des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\forall t>0 \qquad |h(x,t)| \leqslant h(0,t) = f(t) \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{e}^{-ta}$$

  Cette dernière fonction est en effet intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ car le développement limité du cosinus prouve qu'elle tend vers 0 en 0, et sur $[\,1\,;+\infty\,[$ car elle y est majorée par $t\longmapsto 2\,\mathrm{e}^{-ta}$.

- Concernant la dérivée seconde, elle est majorée uniformément en x :

$$\forall t>0 \quad \forall x\geqslant 0 \qquad \left|\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-ta}$$

  où la fonction $t\longmapsto 2\,\mathrm{e}^{-ta}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.