Mines Physique 1 MP 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Freulon (ENS Ulm) ; il a été relu par Louis Salkin (ENS Cachan) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Cette épreuve est composée de trois parties indépendantes qui abordent des méthodes vues au cours des deux années de classes préparatoires.

- La première partie porte sur l'étude d'un accéléromètre utilisé dans les smartphones et les manettes de jeu. On l'étudie comme un oscillateur harmonique amorti soumis à une excitation sinusoïdale. La conversion de la réponse mécanique de l'accéléromètre en un signal électrique est effectuée à l'aide d'une détection dont on établit les propriétés.
- Dans la deuxième partie, on analyse le fonctionnement d'un turboréacteur. Après avoir démontré des lois générales sur les systèmes ouverts en régime permanent, on se penche sur l'accélération d'un véhicule propulsé par le turboréacteur.
- Les interférences en optique sont utilisées dans la troisième partie pour diagnostiquer des défauts de surface. C'est l'interféromètre de Michelson qui est au cœur de cette étude, en coin d'air puis en lame d'air.

Cette épreuve est de longueur et de difficulté raisonnables. Elle touche à des domaines très différents du programme et constitue un bon entraînement aux épreuves de trois heures du concours Mines-Ponts.

Indications

Partie I

2 Remarquer que $\ddot{x} = \ddot{\mathrm{L}} + a$.

3 La fonction de transfert est celle d'un filtre passe-bas.

4 Écrire la loi des nœuds en termes des potentiels.

5 Chercher la solution de l'équation homogène, puis la solution particulière pour le cas du second membre constant et enfin la solution particulière correspondant au régime sinusoïdal forcé. La solution générale est une combinaison linéaire de ces trois solutions.

6 Montrer que $$v_3(t) \simeq \frac{\mathrm{V_s}}{2} + \mathrm{V_2} \sin \omega t$$

7 Après une brève discussion sur les invariances, invoquer les relations de passage pour le champ électrique à la traversée d'une interface.

10 Le filtre $\mathrm{R_f C_f}$ ne laisse passer que la composante continue.

Partie II

11 Invoquer la conservation de la masse pour le système proposé par l'énoncé.

12 Sous sa forme la plus générale, le premier principe s'écrit

$$\mathrm{dE_c} + \mathrm{dU} = \delta\mathrm{W} + \delta\mathrm{Q}$$

14 Utiliser la loi de Laplace pour le gaz parfait.

15 La deuxième loi de Joule permet de relier la variation de température à la variation d'enthalpie.

16 Effectuer un bilan de quantité de mouvement.

Partie III

21 d_i dépend de n mais u n'en dépend pas.

22 d_i et u dépendent tous les deux de ε.

24 L'énoncé comporte une erreur : il faut rapprocher $\mathrm{M_2}$ en sorte que $d < 0$.

25 Exprimer l'intensité lumineuse résultante. Exploiter les annulations du cosinus oscillant le plus lentement.

Autour d'un dragster à réaction

I. Mesure de l'accélération par un système embarqué

1 Écrivons la force due à chaque ressort. Pour le ressort de droite (indicé 2),

$$\overrightarrow{\mathrm{F}_{\mathrm{r}2}} = k\,(x_2 - x - \ell_0)\,\overrightarrow{e_x}$$

où ℓ_0 est la longueur à vide du ressort. Pour le ressort de gauche (indicé 1),

$$\overrightarrow{\mathrm{F}_{\mathrm{r}1}} = -k\,(x - x_1 - \ell_0)\,\overrightarrow{e_x}$$

Par conséquent,
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{F}_{\mathrm{r}}} &= \overrightarrow{\mathrm{F}_{\mathrm{r}1}} + \overrightarrow{\mathrm{F}_{\mathrm{r}2}}\\ &= k\,(x_2 + x_1 - 2x)\,\overrightarrow{e_x}\\ &= 2k\,(x_\mathrm{e} - x)\,\overrightarrow{e_x}\end{aligned}$$

donc
$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{F}_{\mathrm{r}}} = -2k\,\mathrm{L}\,\overrightarrow{e_x}}$$

La force de friction est proportionnelle à la vitesse du point O par rapport aux deux amortisseurs solidaires du dragster qui évolue à la vitesse $\dot{x}_\mathrm{e}$ par rapport au sol. Cette force est donc proportionnelle à $\dot{x} - \dot{x}_\mathrm{e}$. Mais $\mathrm{L} = x - x_\mathrm{e}$, d'où

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{F}_{\mathrm{a}}} = -2f\,\dot{\mathrm{L}}\,\overrightarrow{e_x}}$$

Le facteur « 2 » s'explique par la présence de deux amortisseurs.

> Le paragraphe, en haut de la deuxième page de l'énoncé, peut paraître contradictoire puisque l'on y précise d'abord qu'il n'y a pas de frottements et un peu plus loin que le coefficient de frottement est noté f. Il faut certainement comprendre que l'on néglige tout frottement *solide* et que le coefficient pour le frottement *fluide* (supposé proportionnel à la vitesse) est noté f.

2 Après projection sur l'horizontale, le principe fondamental de la dynamique appliqué au dragster dans le référentiel du sol, supposé galiléen, s'écrit

$$m\ddot{x} = -2k\,\mathrm{L} - 2f\,\dot{\mathrm{L}}$$

On a la relation
$$\ddot{x} = \ddot{\mathrm{L}} + a \qquad (\text{car } \ddot{x}_\mathrm{e} = a)$$

que l'on injecte dans l'équation précédente, pour obtenir

$$m\ddot{\mathrm{L}} + 2f\,\dot{\mathrm{L}} + 2k\,\mathrm{L} = -ma$$

Utilisons les grandeurs ω_0 et μ introduites dans l'énoncé. Puisque

$$\mu\,\omega_0 = \frac{f}{m} \qquad \text{et} \qquad {\omega_0}^2 = \frac{2k}{m}$$

Il vient
$$\boxed{\ddot{\mathrm{L}} + 2\mu\,\omega_0\,\dot{\mathrm{L}} + {\omega_0}^2\,\mathrm{L} = -a}$$

3 En notation complexe, l'équation différentielle précédente devient

$$-\omega^2\,\underline{\mathrm{L}} + 2\mathrm{j}\mu\,\omega_0\omega\,\underline{\mathrm{L}} + {\omega_0}^2\,\underline{\mathrm{L}} = -\underline{a}$$

Ainsi,
$$\frac{\underline{\mathrm{L}}}{\underline{a}} = \frac{1}{\omega^2 - {\omega_0}^2 - 2\mathrm{j}\mu\,\omega_0\omega}$$

Factorisons ${\omega_0}^2$ au dénominateur de cette fraction,

$$\boxed{\frac{\underline{\mathrm{L}}}{\underline{a}} = \frac{\mathrm{G}}{\xi^2 - 1 - 2\mathrm{j}\mu\,\xi}}$$

Il apparaît que cette fonction de transfert est celle d'un filtre passe-bas du second ordre. Pour que la mise en mouvement du capteur soit fidèlement reproduite (c'est-à-dire que l'on obtient bien a à une constante près quand on mesure L), il faut que $\xi \ll 1$ c'est-à-dire que

$$\boxed{\omega \ll \omega_0}$$

4 Écrivons la loi des nœuds,

$$\frac{v_3}{\mathrm{R}} + \frac{v_3 - \mathrm{V_s}}{\mathrm{R}} + \mathrm{C_2}\frac{\mathrm{d}(v_3 - v_2)}{\mathrm{d}t} + \mathrm{C_1}\frac{\mathrm{d}(v_3 - v_1)}{\mathrm{d}t} = 0$$

Remplaçons v_1 et v_2 par leur expression et rassemblons les termes en v_3,

$$(\mathrm{C_1} + \mathrm{C_2})\frac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}t} + \frac{2}{\mathrm{R}}\,v_3 = \frac{\mathrm{V_s}}{\mathrm{R}} + \omega \mathrm{V_1}\,(\mathrm{C_1} - \mathrm{C_2})\,\cos\omega t$$

d'où
$$\boxed{\tau\,\frac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}t} + v_3 = \frac{\mathrm{V_s}}{2} + \tau\omega\,\mathrm{V_2}\cos\omega t}$$

5 La solution $v_{3\mathrm{h}}$ de l'équation sans second membre associée à cette équation est

$$v_{3\mathrm{h}}(t) = \mathrm{V_0}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

La solution particulière est la somme d'une fonction constante $v_{3\mathrm{c}}$ et d'une solution sinusoïdale $v_{3\mathrm{s}}$ oscillant à la pulsation ω. Pour déterminer $v_{3\mathrm{c}}$, il suffit de l'injecter dans l'équation différentielle :

$$\tau\,\frac{\mathrm{d}v_{3\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} + v_{3\mathrm{c}} = 0 + v_{3\mathrm{c}} = \frac{\mathrm{V_s}}{2}$$

Par conséquent,
$$v_{3\mathrm{c}}(t) = \frac{\mathrm{V_s}}{2}$$

$v_{3\mathrm{s}}$ s'obtient en traduisant l'équation, en régime sinusoïdal forcé,

$$\tau\,\frac{\mathrm{d}v_{3\mathrm{s}}}{\mathrm{d}t} + v_{3\mathrm{s}} = \tau\omega\,\mathrm{V_2}\cos\omega t$$

qui devient
$$(\mathrm{j}\,\tau\omega\;+1)\underline{v}_{3\mathrm{s}} = \tau\omega\,\mathrm{V_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

Ainsi,
$$\underline{v}_{3\mathrm{s}} = \frac{\tau\omega}{1 + (\tau\omega)^2}\,(1 - \mathrm{j}\,\tau\omega)\,\mathrm{V_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

$$\underline{v}_{3\mathrm{s}} = \frac{\tau\omega}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} + \mathrm{j}\,\frac{-\tau\omega}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}\right)\mathrm{V_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$