

Centrale Physique MP 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Étienne Thibierge (ENS Lyon) ; il a été relu par Raphaël Lasserri (ENS Cachan) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Ce problème traite des étincelles naissant entre deux électrodes fortement polarisées. Il se compose de quatre parties complètement indépendantes. On y aborde des aspects relatifs à la production des étincelles, à leur modélisation et à leur étude expérimentale.

- On s'intéresse dans la partie I à un dispositif historique servant à produire des hautes tensions, la bobine de Ruhmkorff, qui est constituée de deux enroulements en inductance totale. On commence par une étude électrocinétique des deux enroulements, en régime transitoire puis en régime sinusoïdal forcé. Enfin, on étudie le couplage inductif entre les deux enroulements, ce qui permet de calculer des ordres de grandeur des tensions produites.
- La partie II traite de la modélisation du déclenchement de l'étincelle d'un point de vue microscopique. Après avoir rappelé des ordres de grandeur relatifs aux propriétés microscopiques des gaz, on obtient, dans le cadre de la théorie cinétique, des expressions et des ordres de grandeur du champ électrique et de la tension nécessaires à la formation de l'étincelle.
- Le plasma formé par l'étincelle est ensuite étudié expérimentalement dans la partie III, à partir de résultats publiés dans un article de recherche. Différentes parties du dispositif expérimental sont analysées, notamment le contrôle optique d'un faisceau laser dans un modèle géométrique, et la chaîne de détection électronique de la déviation du faisceau laser.
- Enfin, on cherche dans la partie IV à interpréter les résultats expérimentaux précédents par un modèle électromagnétique du plasma. On étudie en particulier la propagation dispersive d'une onde électromagnétique dans un tel milieu.

Ce problème cohérent et intéressant propose un parcours assez varié autour du phénomène d'arc électrique. Les questions posées sont généralement de difficulté modérée, et abordent un large spectre de notions communes aux programmes de toutes les filières de CPGE. Il intéressera donc aussi bien les étudiants de MP que de PC ou PSI. On y trouve en effet de l'électrocinétique, de la mécanique du point, un zeste d'optique géométrique et ondulatoire, de la théorie cinétique des gaz, de l'électromagnétisme, et de la physique des ondes. Par ailleurs de nombreuses questions demandent une analyse physique rigoureuse plus que des compétences calculatoires poussées.

INDICATIONS

Partie I

- I.B.1. Découper le cylindre en tranches d'épaisseur d , et considérer que chaque tranche est une superposition de spires circulaires d'épaisseur d .
- I.B.2. Des arguments physiques sont nécessaires, en plus de l'approche dimensionnelle.
- I.C.1. On peut partir de la définition de L_1 , L_2 et M en termes de flux et utiliser la loi de Faraday.
- I.C.2. La constante de temps τ_1 est celle obtenue à la question I.A.1.

Partie II

- II.A.1.a. Supposer le gaz parfait.
- II.A.2. On peut remarquer que si le gaz de même densité N^* était figé sur un réseau cubique, alors le pas du réseau serait la distance d_m entre molécules voisines.
- II.B.2.b. L'énoncé n'est pas très clair sur la définition de τ_c . Il s'agit du temps typique entre une collision quelconque et une collision ionisante dans le cas où l'effet d'avalanche se produit. Les collisions dues à l'agitation thermique n'interviennent pas ici.
- II.B.2.c. Le paramètre important pour que l'effet d'avalanche ait lieu est la fraction de collisions ionisantes parmi le nombre total de collisions. Il est intéressant calculer le rapport de deux longueurs, l'une caractérisant les collisions ionisantes et l'autre l'ensemble des collisions.

Partie III

- III.A.3. Noter que
$$\frac{n_0 - n_p}{n_p} \simeq \frac{n_0 - n_p}{n_0}$$
- III.B.3. Le calcul de l'angle de divergence en sortie fait appel à des notions de physique des lasers hors programme.
- III.C.1. Noter que la puissance reçue est proportionnelle à la surface éclairée. On peut assimiler la variation de surface éclairée à un rectangle.

Partie IV

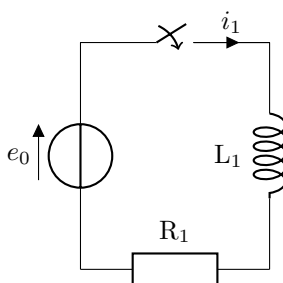
- IV.A.3. Utiliser la représentation complexe.
- IV.B.2. Procéder comme pour obtenir l'équation d'onde dans le vide, en utilisant la relation constitutive du plasma pour remplacer le terme $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$.
- IV.B.3. Il est judicieux de commencer par calculer $1/v_\varphi^2$.
- IV.B.5. La définition de l'indice optique fait intervenir la vitesse de phase, pas la vitesse de groupe.

PRODUCTION D'ÉTINCELLES ÉLECTRIQUES ET EXPLORATION OPTIQUE DU PLASMA FORMÉ

I. LA BOBINE DE RUHMKORFF : UNE PROUESSE TECHNOLOGIQUE DU XIX^e SIÈCLE

I.A Établissement du courant dans un circuit inductif primaire

I.A.1 Le circuit inductif primaire est équivalent à une résistance R_1 , une bobine idéale d'inductance L_1 , un interrupteur et une source idéale de tension continue e_0 mis en série.



Une fois le régime transitoire terminé, la bobine idéale se comporte comme un fil sans résistance. D'après la loi d'Ohm,

$$i_{1\infty} = \frac{e_0}{R_1}$$

Établissons l'équation différentielle vérifiée par i_1 pour $t \geq 0$, une fois l'interrupteur fermé. Par application de la loi des mailles,

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} = e_0$$

soit

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{R_1}{L_1} i_1 = \frac{e_0}{L_1}$$

On introduit le temps caractéristique

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R_1}$$

La solution de l'équation différentielle est la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation complète, que l'on prend comme étant $i_{1\infty}$ déterminée précédemment. Ainsi,

$$i_1(t) = i_{1\infty} + I_1 e^{-t/\tau_1}$$

où I_1 est une constante qui s'obtient à partir des conditions initiales.

L'équation différentielle est d'ordre 1, il n'y a donc qu'une constante à déterminer et une seule condition initiale suffit.

On considère en l'occurrence la continuité du courant imposée par la bobine dans sa branche, $i(t = 0^+) = i(t = 0^-) = 0$. Ainsi,

$$I_1 = -i_{1\infty}$$

d'où

$$i_1(t) = i_{1\infty} (1 - e^{-t/\tau_1})$$

I.A.2 Application numérique : $\tau_1 = 9,12 \cdot 10^{-4} \text{ s}$

I.B. Enroulement secondaire

I.B.1 Une tranche de cylindre de largeur d est entourée de $N = (r'_2 - r_2)/d$ spires de rayon $r_2 + n d$, ce motif étant répété $M = h/d$ fois pour recouvrir tout le cylindre. La longueur de fil nécessaire pour entourer une tranche de cylindre est

$$\ell_{\text{tranche}} = \sum_{n=0}^{N-1} 2\pi (r_2 + n d) = 2\pi \left(N r_2 + \frac{N(N-1)}{2} d \right)$$

On fait ici une approximation, puisque le rayon de la spire n est en fait $r_2 + n d + d/2$. Néanmoins le terme omis contribuerait à ℓ_{tranche} par un terme $N d$, négligeable devant le terme dominant $N^2 d$.

Par conséquent, la longueur totale requise est

$$\ell = M \ell_{\text{tranche}} = 2\pi \frac{h}{d} \left(\frac{r'_2 - r_2}{d} r_2 + \frac{(r'_2 - r_2)(r'_2 - r_2 - d)}{2d^2} d \right)$$

En négligeant d devant r_2 , on obtient finalement

$$\ell = \pi \frac{h}{d^2} (r_2'^2 - r_2^2)$$

ce qui est la forme demandée par l'énoncé, avec

$$\alpha = \pi$$

I.B.2 Raisonnons dimensionnellement, en écrivant

$$R_2 = \ell^a \times \gamma^b \times S^c$$

avec a , b et c à déterminer, et en notant $S = \pi d^2/4$ la section du fil. En termes d'unités,

$$[\Omega] = [m]^a \times [\Omega]^{-b} \cdot [m]^{-b} \times [m]^{2c}$$

ce qui conduit au système

$$\begin{cases} 1 = -b \\ 0 = a - b + 2c \end{cases}$$

Ce système ne compte que deux équations pour trois inconnues, car il n'y a que deux dimensions mises en jeu pour trois paramètres physiques différents. L'approche dimensionnelle suggérée par l'énoncé ne peut donc suffire pour déterminer complètement le résultat.