X Maths B MP 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Florian Metzger (ENS Cachan) ; il a été relu par Samuel Baumard (ENS Ulm) et Gilbert Monna (Professeur en CPGE).

Ce sujet est consacré au thème original de l'exposant de Hölder ponctuel d'une fonction continue.

- Dans la première partie on définit l'ensemble $\Gamma^s(x_0)$ des $f \in \mathcal{C}([\,0\,;1\,])$ vérifiant
$$\mathrm{H}_{s,x_0}(f) = \operatorname*{Sup}_{x\in \mathrm{I}\smallsetminus\{x_0\}} \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^s} < +\infty$$
On y montre la décroissance de la fonction $s \mapsto \Gamma^s(x_0)$ pour l'inclusion, ce qui permet de définir l'exposant de Hölder d'une fonction f en x_0 par
$$\alpha_f(x_0) = \operatorname{Sup}\,\{s \in [\,0\,;1\,[\mid f \in \Gamma^s(x_0)\}$$
On étudie, de façon théorique ainsi que sur des exemples, le lien entre cet exposant et le module de continuité de f défini pour $h \in [\,0\,;1\,]$ par
$$\omega_f(h) = \operatorname{Sup}\left\{|f(x)-f(y)| \ :\ (x,y) \in [\,0\,;1\,]^2 \quad \text{et} \quad |x-y| \leqslant h\right\}$$
La dernière question de cette partie est astucieuse ; le reste relève de l'analyse plus classique de première année.
- La deuxième partie est consacrée à l'étude du système dit de Schauder, c'est-à-dire la famille indexée par $j \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![\,0\,;\,2^j-1\,]\!]$ de fonctions positives « en triangle » de support $\left[\,k\,2^{-j}\,;(k+1)2^{-j}\,\right]$, de maximum 1 atteint en $(k+1/2)2^{-j}$. Le résultat principal de cette partie est que toute fonction continue sur $[\,0\,;1\,]$ et nulle au bord de l'intervalle est développable en série de fonctions suivant cette « base », avec convergence uniforme de la série et avec des « coefficients de Schauder »
$$c_{j,k}(f) = f((k+1/2)2^{-j}) - \frac{f(k\,2^{-j}) + f((k+1)2^{-j})}{2}$$
Enfin, si $f \in \Gamma^s(x_0)$ est nulle au bord, alors les coefficients de Schauder vérifient aussi une sorte d'inégalité höldérienne localisée en x_0 dans laquelle intervient $\mathrm{H}_{s,x_0}(f)$. Ici, beaucoup de technique et une compréhension fine de la position relative de deux subdivisons dyadiques différentes de $[\,0\,;1\,]$ sont requises.
- Enfin, dans la dernière partie on s'intéresse à une réciproque partielle de l'inégalité sur les coefficients obtenue en fin de deuxième partie, en rajoutant une hypothèse de décroissance logarithmique sur le module de continuité ω_f. On en déduit une minoration de l'exposant de Hölder. Ici encore, peu de références au cours, mais beaucoup de technique, de rapidité d'esprit et d'aisance dans les calculs sont nécessaires pour s'en sortir.

Ce sujet est long, difficile car technique, calculatoire, et éloigné du cours travaillé pendant l'année. Même si les résultats développés sont intéressants et ont des applications concrètes en mathématiques (ondelettes, traitement du signal), dans l'optique de l'entraînement aux concours il ne constitue pas vraiment un bon sujet de révision.

Indications

Première partie

1.a Remarquer que $|x-x_0|^{-s_1} = |x-x_0|^{-s_2} \times |x-x_0|^{s_2-s_1}$ avec $s_2 - s_1 \geqslant 0$. Pour déterminer $\Gamma^0(x_0)$: toute fonction continue sur $[\,0\,;1\,]$ y est bornée.

1.b Se servir du taux de variation de la fonction en x_0.

1.c Utiliser le fait que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en zéro.

3.a Pour la croissance, établir que les ensembles dont on prend le supremum sont croissants en h pour l'inclusion. Pour la continuité en zéro, calculer $\omega_f(0)$ et noter que toute fonction continue sur $[\,0\,;1\,]$ y est uniformément continue.

3.b Prendre $h \leqslant h'$ et $(x,y) \in [\,0\,;1\,]^2$ vérifiant $|x-y| \leqslant h'$ et distinguer suivant que $|x-y|$ est inférieur ou supérieur à h.

4.a La relation $|f(x)-f(y)| \leqslant \omega_f(|x-y|)$ est valable pour tous $x,y \in [\,0\,;1\,]$.

4.b Noter que q est continue sur $[\,0\,;1\,]$ et dérivable sur $]\,0\,;1\,]$. Pour la deuxième partie de la question, prendre $h_n = 2^{-2n}$ et trouver x_n et y_n vérifiant

$$|y_n - x_n| \leqslant h_n, \qquad \cos(\pi/x_n) = -1 \qquad \text{et} \qquad \cos(\pi/y_n) = 1$$

Deuxième partie

5.a Distinguer les cas suivant la parité de k.

5.b Remarquer que $\theta_{j,k}(x) \neq 0$ équivaut à $x \in \left]\, k\,2^{-j}\,;(k+1)2^{-j}\,\right[$.

5.c Tracer la fonction $\theta_{j,k}$ pour visualiser la continuité. Ensuite, si $n > j$, montrer

$$[\,\ell\,2^{-n}\,;(\ell+1)2^{-n}\,] \subset \left[\,p\,2^{-j}\,;(p+1)2^{-j}\,\right]$$

pour un certain entier $k \in \mathcal{T}_j$. Distinguer les cas suivant que $p \neq k$ ou $p = k$. Pour ce dernier on montrera que $[\,\ell\,2^{-n}\,;(\ell+1)2^{-n}\,]$ est inclus dans l'une des moitiés de l'intervalle $\left[\,k\,2^{-j}\,;(k+1)2^{-j}\,\right]$.

5.d Distinguer suivant que x et y sont dans $\left[\,k\,2^{-j}\,;(k+1)2^{-j}\,\right]$ ou non.

6 Se servir de l'uniforme continuité d'une fonction continue sur $[\,0\,;1\,]$.

7.a Distinguer suivant que $j > i$, $i > j$, ou $i = j$.

- Si $j > i$, utiliser la question 5.c.
- Si $i > j$, situer par rapport à l'intervalle $\left[\,\ell\,2^{-i}\,;(\ell+1)2^{-i}\,\right]$, les points

  $$\alpha_{j,k} = k\,2^{-j}, \qquad \beta_{j,k} = k\,2^{-j} + 2^{-j-1} \qquad \text{et} \qquad \gamma_{j,k} = (k+1)2^{-j}$$

  En particulier, montrer qu'ils sont toujours en dehors ou à une extrémité de cet intervalle, ce qui assure que la fonction $\theta_{i,\ell}$ y est nulle.
- Si $i = j$, utiliser le résultat de la question 5.b.

7.b Montrer la convergence normale de la série en majorant le terme général après avoir tracé le graphe de la fonction $\sum\limits_{k \in \mathcal{T}_j} \theta_{j,k}$. En utilisant des opérations sur les séries convergentes, établir ensuite que

$$\forall (j,k) \in \mathcal{I} \qquad c_{j,k}(f^a) = \sum_{j=0}^{+\infty} c_{j,k}(f_j^a)$$

8.a Penser à l'inégalité des accroissements finis et au résultat de la question 7.b.

8.b Utiliser la formule de Taylor-Lagrange avec la majoration du reste pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ entre les points x et $(x+y)/2$, puis y et $(x+y)/2$.

9.a Se souvenir de la question 5.b.

9.b Expliciter une relation de récurrence entre $\mathrm{S}_n f$ et $\mathrm{S}_{n-1} f$ puis distinguer suivant la parité de ℓ. Si ℓ est pair, utiliser la question 5.b. Si ℓ est impair, utiliser en plus la question 9.a.

9.c Interpréter le résultat de la question 9.b en termes d'hérédité d'une propriété sur les entiers.

10.a Pour $\varepsilon > 0$, utiliser un réel $\eta > 0$ associé et donné par l'uniforme continuité de f. Pour $x \in [\,0\,;1\,]$, considérer $n \geqslant -\log_2 \eta - 1$ et $\ell = \widetilde{k}_{n+1}(x)$. En utilisant l'inégalité triangulaire, majorer la différence $|f(x) - \mathrm{S}_n f(x)|$ par la somme de trois termes en introduisant les points $f(\ell\, 2^{-n-1})$ et $\mathrm{S}_n f(\ell\, 2^{-n-1})$. Que fournissent alors les questions 9.a et 9.c, ainsi que l'uniforme continuité de f ?

10.b Calculer $\mathrm{S}_n(\theta_{j,k})$ pour $j \in [\![\, 0\,;n\,]\!]$ et $k \in \mathcal{T}_j$ en utilisant la question 7.a. Pour la norme, remarquer que $\mathrm{S}_n f$ est affine par morceaux avec une subdivision qui fournit les maxima potentiels, puis utiliser la question 9.c. Trouver enfin une fonction telle que $\mathrm{S}_n f = f$.

11.a L'inégalité se réécrit : $(a^s + b^s)/2 \leqslant ((a+b)/2)^s$

11.b Faire intervenir $f(x_0)$ par inégalité triangulaire dans la définition de $c_{j,k}(f)$ puis examiner les trois cas

$$x_0 \in \left[\, k\, 2^{-j}\,; (k+1)2^{-j}\,\right] \quad \text{ou} \quad x_0 < k2^{-j} \quad \text{ou} \quad x_0 > (k+1)2^{-j}$$

Troisième partie

12 Passer au logarithme en base 2 et utiliser la partie entière.

13. Noter que $\theta_{j,k}(x)$ est non nul si et seulement si $k = \widetilde{k}_j(x)$. Se servir ensuite du résultat de la question 5.d.

14.a Commencer par utiliser la propriété $(\mathcal{P}_1)$, puis l'inégalité de la question 11.a, et enfin montrer que

$$\left|x_0 - \widetilde{k}_j(x)\, 2^{-j}\right| \leqslant |x - x_0| + \left|x_0 - \widetilde{k}_j(x_0)\, 2^{-j}\right|$$

Se souvenir ensuite que $|x - x_0| \leqslant 2^{-n_0}$ et utiliser la condition $j \leqslant n_0$.

14.b Sommer les inégalités de la question 14.a et se servir de la définition de n_0.

15 Ici encore, utiliser la définition de $\widetilde{k}_j(x_0)$ et de n_0.

16 Considérer $\mathrm{X} = \{p \in \mathbb{N} \mid \omega_f(2^{-p}) \geqslant 2^{-n_0 s}\}$. Utiliser la condition $\|f\|_\infty = 1$ en lien avec le fait qu'une fonction continue sur un segment atteint ses bornes. Montrer que X est majoré.

17 Reprendre le découpage de la question 10.a afin d'utiliser les questions 9.a et 9.c avec $n \geqslant n_1$, en majorant à présent à l'aide de $\omega_f(2^{-n-1})$.

18.a La somme portant sur $\mathcal{T}_j$ ne comporte qu'un élément. Se servir de $(\mathcal{P}_1)$ puis se rappeler que

$$\left|x_0 - \widetilde{k}_j(x)\, 2^{-j}\right| \leqslant |x - x_0| + 2^{-j}$$

18.b La propriété $(\mathcal{P}_2)$ donne l'inégalité droite par croissance de la fonction $x \mapsto x^{1/\mathrm{N}}$.

19 Majorer $|f(x) - f(x_0)|$ par trois différences où interviennent $\mathrm{S}_n f(x)$ et $\mathrm{S}_n f(x_0)$. Distinguer ensuite les cas suivant que $n_0 \geqslant n_1$ ou $n_0 < n_1$. Montrer que f appartient à $\Gamma^s(x_0)$ dans le premier cas et à $\Gamma^{(1-1/\mathrm{N})s}$ pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ dans le second cas, grâce aux inégalités des questions 14.b, 15 et 18.b.

I. Définition de l'exposant de Hölder ponctuel

1.a Soients $x_0 \in [\,0\,;1\,]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $s \in [\,0\,;1\,[$ et $f, g \in \Gamma^s(x_0)$. Posons $h = \lambda f + g$. Alors $h \in \mathcal{C}$ car $\mathcal{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad |h(x) - h(x_0)| \leqslant |\lambda|\,|f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|$$

Notons $\mathrm{H}_{s,x_0}(\varphi) = \operatorname*{Sup}_{x \in [\,0\,;1\,] \smallsetminus \{x_0\}} \dfrac{|\varphi(x) - \varphi(x_0)|}{|x - x_0|^s}$ pour toute fonction $\varphi \in \Gamma^s(x_0)$.

> Remarquons que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}$, l'ensemble
> $$\{|\varphi(x) - \varphi(x_0)|\,/\,|x - x_0|^s \;\;|\;\; x_0 \in [\,0\,;1\,]\}$$
> est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}_+$. Il admet par conséquent une borne supérieure dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Cela légitime la définition de $\Gamma^s(x_0)$.

Il vient alors

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \smallsetminus \{x_0\} \qquad \frac{|h(x) - h(x_0)|}{|x - x_0|^s} \leqslant |\lambda|\,\mathrm{H}_{s,x_0}(f) + \mathrm{H}_{s,x_0}(g)$$

La borne supérieure étant le plus petit des majorants on en déduit que

$$\operatorname*{Sup}_{x \in [\,0\,;1\,] \smallsetminus \{x_0\}} \frac{|h(x) - h(x_0)|}{|x - x_0|^s} \leqslant |\lambda|\,\mathrm{H}_{s,x_0}(f) + \mathrm{H}_{s,x_0}(g) < +\infty$$

Par suite, $$\lambda f + g \in \Gamma^s(x_0)$$

En remarquant que la fonction nulle appartient à $\Gamma^s(x_0)$ on peut ainsi conclure que

$$\boxed{\text{L'ensemble } \Gamma^s(x_0) \text{ est un sous-}\mathbb{R}\text{-espace vectoriel de } \mathcal{C}.}$$

Soient deux réels s_1, s_2 vérifiant $0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 < 1$ et $f \in \Gamma^{s_2}(x_0)$. Alors

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^{s_1}} = \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^{s_2}} \times |x - x_0|^{s_2 - s_1} \leqslant \mathrm{H}_{s,x_0}(f)\,|x - x_0|^{s_2 - s_1}$$

Comme $s_2 - s_1 \geqslant 0$, il vient que $|x - x_0|^{s_2 - s_1}$ est borné, donc

$$\operatorname*{Sup}_{x \in [\,0\,;1\,] \smallsetminus \{x_0\}} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^{s_1}} < +\infty$$

c'est-à-dire $f \in \Gamma^{s_1}(x_0)$. Finalement,

$$\boxed{\forall\, 0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 < 1 \qquad \Gamma^{s_2}(x_0) \subset \Gamma^{s_1}(x_0)}$$

Enfin, par définition,

$$\Gamma^0(x_0) = \left\{ f \in \mathcal{C} \mid \operatorname*{Sup}_{x \in [\,0\,;1\,] \smallsetminus \{x_0\}} |f(x) - f(x_0)| < +\infty \right\} \subset \mathcal{C}$$

Réciproquement, si $f \in \mathcal{C}$, alors la fonction $x \longmapsto f(x) - f(x_0)$ est continue sur l'intervalle compact $[\,0\,;1\,]$, donc elle y est bornée. A fortiori

$$\operatorname*{Sup}_{x \in [\,0\,;1\,] \smallsetminus \{x_0\}} |f(x) - f(x_0)| < +\infty$$

Cela montre que $\mathcal{C} \subset \Gamma^0(x_0)$. Ainsi,

$$\boxed{\forall\, x_0 \in [\,0\,;1\,] \qquad \Gamma^0(x_0) = \mathcal{C}}$$