Mines Maths 1 MP 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Gilbert Monna (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Antoine Sihrener (Professeur en CPGE) et Nicolas Martin (ENS Lyon).

Le problème porte sur l'algèbre linéaire et bilinéaire. Il introduit la notion d'application bilinéaire symétrique plate et envisage quelques-unes de ses propriétés. Notons une petite intervention de la topologie.

- La partie A est consacrée au cas particulier des formes bilinéaires symétriques, le but étant de démontrer que les formes bilinéaires symétriques plates sont exactement celles qui sont de rang 1.
- La partie B généralise la très classique diagonalisation simultanée de deux endomorphismes qui commutent : les endomorphismes étant symétriques, on montre l'existence d'une base orthonormale commune de diagonalisation, et on étend le résultat à un ensemble quelconque d'endomorphismes. Si l'on connaît bien la diagonalisation simultanée, cela ne présente pas de difficulté majeure.
- À la partie C, on passe au cas des applications bilinéaires symétriques de $(\mathbb{R}^n)^2$ dans $\mathbb{R}^p$ et on introduit la notion de vecteur régulier pour ces applications. Après quelques questions techniques, dont une relativement difficile, on établit une propriété des applications bilinéaires symétriques plates. On revient ensuite au cas général pour démontrer que l'ensemble des vecteurs réguliers pour une forme bilinéaire symétrique donnée est un ouvert dense de $\mathbb{R}^n$.
- La dernière partie porte sur le cas particulier des applications bilinéaires symétriques de $(\mathbb{R}^n)^2$ dans $\mathbb{R}^n$ de noyau nul, le but final étant d'établir que ces applications sont diagonalisables.

Il n'est jamais commode de devoir, en trois heures, découvrir, comprendre et manipuler une notion nouvelle. Ce sujet plutôt abstrait est donc très formateur.

Indications

Partie A

2 Dans le cas où $a \otimes b$ est symétrique, comparer les noyaux des formes linéaires a et b.

3 Utiliser le théorème de réduction des matrices symétriques réelles puis chercher ce que donne l'hypothèse sur le rang de φ pour les valeurs propres de la matrice de φ.

4 Remarquer que dans le cas $p = 1$, le produit scalaire n'est rien d'autre que le produit usuel des nombres réels.

5 Utiliser le théorème de réduction des matrices symétriques réelles pour obtenir une base dans laquelle la matrice de φ est diagonale. Puis, en utilisant l'hypothèse « φ est une forme plate », démontrer que tous les termes diagonaux de la matrice sont nuls sauf un.

Partie B

7 Si u_{i_0} est un endomorphisme symétrique qui n'est pas une homothétie, l'espace vectoriel E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u_{i_0}. Si $(u_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est une famille d'endomorphismes qui commutent avec u_{i_0}, la restriction de ces endomorphismes à chaque sous-espace propre E_λ de u_{i_0} définit une famille d'endomorphismes symétriques de E_λ qui commutent.

Partie C

8 Penser à faire apparaître un polynôme caractéristique, le spectre d'une matrice réelle est fini.

9 Extraire une sous-matrice inversible de la matrice des coordonnées des vecteurs $a_1, a_2, \ldots, a_r$ pour appliquer la question précédente.

10 Après l'indication de l'énoncé, utiliser la question 9 pour montrer l'existence d'un nombre réel t tel que $\varphi(x,y) \in \mathrm{Im}\,(\widetilde{\varphi}(x+ty))$ et aboutir à une contradiction.

11 Utiliser la question précédente, puis l'hypothèse que φ est une application bilinéaire symétrique plate.

12 Penser à la continuité du déterminant.

13 À partir d'un vecteur non régulier v' et d'un vecteur régulier v, montrer à l'aide de la question 8 l'existence de vecteurs réguliers de la forme $v' + tv$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Partie D

14 Application immédiate de la question 11.

15 Écrire $\langle \psi(x)(y) \mid z\rangle = \langle \widetilde{\varphi}(x) \circ \widetilde{\varphi}(v)^{-1}(y) \mid \widetilde{\varphi}(v) \circ \widetilde{\varphi}(v)^{-1}(z)\rangle$ puis revenir à la définition de $\widetilde{\varphi}$ pour pouvoir utiliser l'hypothèse que φ est une forme bilinéaire symétrique plate.

16 Utiliser le fait que $\widetilde{\varphi}$ est bijective et la question précédente.

17 Poser $\varepsilon_i = \widetilde{\varphi}(v)^{-1}(e_i)$, puis exprimer $\varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ et $\varphi(\varepsilon_j, \varepsilon_i)$.

A. Formes bilinéaires symétriques plates

1 Montrons d'abord l'unicité. Supposons qu'il existe deux endomorphismes u et v tels que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \qquad \varphi(x,y) = \langle u(x) \,|\, y \rangle = \langle v(x) \,|\, y \rangle$$

Il en résulte $\langle u(x) \,|\, y \rangle - \langle v(x) \,|\, y \rangle = 0$. Par linéarité à gauche du produit scalaire, $\langle u(x) - v(x) \,|\, y \rangle = 0$ pour tout couple (x,y) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}^n$, le vecteur $u(x)-v(x)$ est orthogonal à tout élément y de $\mathbb{R}^n$. Par conséquent, il appartient au sous-espace vectoriel orthogonal de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique, qui est réduit au vecteur nul. Il en résulte que $u(x) - v(x) = 0$, ceci pour tout x élément de $\mathbb{R}^n$, ce qui implique $u = v$.

Montrons maintenant l'existence. On désigne par $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On définit un endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ en posant

$$u(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(e_i, e_j) e_j$$

L'endomorphisme u est défini par la donnée des images des vecteurs de la base canonique. On a

$$\langle u(e_i) \,|\, e_k \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \varphi(e_i, e_j) e_j \,\middle|\, e_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \varphi(e_i, e_j) \langle e_j \,|\, e_k \rangle = \varphi(e_i, e_k)$$

puisque la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale pour le produit scalaire canonique. Ainsi, on définit un endomorphisme u tel que $\varphi(e_i, e_j) = \langle u(e_i) \,|\, e_j \rangle$ pour tout couple d'entiers i et j compris entre 1 et n. Par linéarité de u et bilinéarité de φ et du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, on en déduit

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \qquad \varphi(x,y) = \langle u(x) \,|\, y \rangle$$

> Il existe un unique endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(x,y) = \langle u(x) \,|\, y \rangle$ pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$.

> On peut aussi utiliser le théorème de représentation des formes linéaires dans un espace vectoriel de dimension finie. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application $y \mapsto \varphi(x,y)$ est une forme linéaire, donc il existe un unique élément de $\mathbb{R}^n$, que l'on note $u(x)$, tel que, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x,y) = \langle u(x) \,|\, y \rangle$. On définit ainsi une application u de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même (à cause de l'unicité du vecteur $u(x)$) et on montre ensuite que cette application est linéaire.

Par hypothèse, φ est une forme bilinéaire symétrique :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$$

d'où $\quad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad \langle u(x) \,|\, y \rangle = \varphi(x,y) = \varphi(y,x) = \langle u(y) \,|\, x \rangle = \langle x \,|\, u(y) \rangle$

> L'application u est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, \langle\,|\,\rangle)$.

L'endomorphisme u étant symétrique de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même, il est diagonalisable dans une base orthonormale $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Ainsi, $\langle u(\varepsilon_i) \,|\, \varepsilon_j \rangle = 0$ si i est différent de j, ce qui est équivalent à $\varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$, pour tout couple (i,j) d'entiers naturels distincts compris entre 1 et n. Il en résulte que

> L'application φ est diagonalisable.

2 Puisque, pour tout couple (x,y) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $(a\otimes b)(x,y)=a(x)b(y)$ est un produit de nombres réels, l'application $a\otimes b$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient $(x,y,z)\in\mathbb{R}^n$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}(a\otimes b)(\lambda x+\mu y,z)&=a(\lambda x+\mu y)b(z)\\&=(\lambda a(x)+\mu a(y))b(z)\\&=\lambda a(x)b(z)+\mu a(y)b(z)\\(a\otimes b)(\lambda x+\mu y,z)&=\lambda(a\otimes b)(x,z)+\mu(a\otimes b)(y,z)\end{aligned}$$

Il en résulte que $a\otimes b$ est linéaire à gauche, on montre de même qu'elle est linéaire à droite. Finalement,

$$\boxed{a\otimes b \text{ est une forme bilinéaire.}}$$

L'application $a\otimes b$ est symétrique si et seulement si

$$\forall\,(x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2\qquad a(x)b(y)=a(y)b(x)$$

Supposons que a et b ne sont pas des formes linéaires nulles. Il existe un vecteur y appartenant à $\mathbb{R}^n$ tel que $a(y)$ soit non nul. Soit x un élément du noyau de a. On a alors $a(x)b(y)=0$, d'où $a(y)b(x)=0$, ce qui entraîne que $b(x)=0$. Il en résulte que $\operatorname{Ker}(a)\subseteq\operatorname{Ker}(b)$. On montre par un raisonnement analogue l'inclusion inverse. Les deux formes linéaires ayant le même noyau, elles sont proportionnelles.

Réciproquement, si l'on suppose que $b=\lambda a$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$, on a

$$\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2\quad(a\otimes b)(x,y)=a(x)\lambda a(y)=\lambda a(x)a(y)=a(y)\lambda a(x)=(a\otimes b)(y,x)$$

Par conséquent,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La forme bilinéaire } a\otimes b \text{ est symétrique si et seulement}\\ \text{si les formes linéaires } a \text{ et } b \text{ sont proportionnelles.}\end{array}}$$

3 Soient $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ une base qui diagonalise φ et $(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ la base duale correspondante. Puisque φ est de rang 1, la matrice de φ dans la base $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$, qui est diagonale, a un seul terme non nul. En changeant l'ordre des vecteurs de la base, si nécessaire, on peut supposer que la matrice de φ est $\operatorname{diag}(\lambda,0,\ldots,0)$.

Soient $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ et $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$ écrits dans la base $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$. Avec la matrice de φ, on a $\varphi(x,y)=\lambda x_1y_1=\lambda f_1(x)f_1(y)$. Si λ est positif, on pose $f=\sqrt{\lambda}f_1$; si λ est négatif, on pose $f=\sqrt{-\lambda}f_1$, c'est-à-dire $f=\sqrt{|\lambda|}f_1$. Dans les deux cas,

$$\boxed{\exists\, f\in\mathbb{R}^{n*}\qquad \varphi=\pm\, f\otimes f}$$

> Voici une démonstration alternative pour éviter le recours à la dualité. Soit A la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Puisque la forme bilinéaire φ est de rang 1, la matrice A est de rang 1. D'après le théorème du rang, elle admet un noyau de dimension $n-1$, hyperplan que l'on désigne par H.
>
> Soit u un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$, orthogonal à H. Tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ se décompose de manière unique sous la forme $x=x_1+\lambda u$ avec $x_1\in\mathrm{H}$. Posons alors $g(x)=\lambda$. L'unicité de la décomposition de x dans la somme directe $\mathbb{R}^n=\mathrm{H}\oplus\mathbb{R}u$ assure que $g(x)$ est défini de manière unique, ainsi g est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.