X Maths PC 2012 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Puyhaubert (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Jules Svartz (ENS Cachan) et Gilbert Monna (Professeur en CPGE).

Le problème de l'École Polytechnique porte cette année sur les équations différentielles autonomes dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire les équations différentielles de la forme

$$\mathrm{Y}' = f(\mathrm{Y}) \qquad \text{avec } f \text{ de classe } \mathscr{C}^1$$

Le traitement est progressif avec un exemple en dimension 1, puis le cas des applications linéaires, et enfin le cas général avec notamment l'utilisation des méthodes de linéarisation, qui permettent d'établir le comportement des solutions au voisinage de points d'équilibre $\mathrm{Y}_0 \in \mathbb{R}^n$ (définis par $f(\mathrm{Y}_0) = 0$).

- Le préliminaire introduit la notion de norme matricielle subordonnée et conduit à démontrer qu'il s'agit de normes d'algèbres, c'est-à-dire de normes sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \qquad |||\mathrm{AB}||| \leqslant |||\mathrm{A}||| \cdot |||\mathrm{B}|||$$

- La première partie est consacrée à l'étude d'un exemple d'équation différentielle autonome non linéaire, mais à variables séparables, ce qui permet un calcul explicite de la solution.
- La deuxième partie fait manipuler sans le dire la notion d'exponentielle de matrices, qui est hors-programme en PC. Il faut par conséquent commencer par établir toutes ses propriétés classiques. On démontre ensuite des propriétés des solutions des systèmes linéaires $\mathrm{Y}' = \mathrm{AY}$ suivant certaines conditions satisfaites par la matrice A.
- La dernière partie commence par justifier qu'une solution d'une équation autonome ne peut avoir pour limite en $+\infty$ qu'un point d'équilibre de f. On traite ensuite un nouvel exemple de système autonome. Enfin, on utilise la technique de linéarisation pour établir que lorsque f présente en 0 un point d'équilibre et une jacobienne dont le spectre est inclus dans $\mathbb{R}_-^*$, les solutions convergent toutes vers 0, lorsque les conditions initiales sont proches de ce point. Le sujet s'achève sur un dernier exemple.

Le sujet est long et sa difficulté n'est pas progressive. Il est en effet parsemé de questions relativement simples, que l'on peut parfaitement résoudre en admettant certains résultats. L'intervention régulière d'exemples est notamment appréciée pour se reposer les méninges.

On ne peut cependant que regretter le fait que ce sujet ne soit pas particulièrement adapté à la filière PC. L'exponentielle de matrices par exemple, qui n'est pas au programme de PC, est manipulée tout au long du sujet, sans que son nom soit mentionné un instant. Là où un élève de MP aurait sûrement reconnu et utilisé facilement cet outil, il y a fort à parier que bon nombre de candidats de PC cette année ont dû s'arracher les cheveux devant la mystérieuse quantité $e_{\mathrm{A}}(t)$.

Indications

Préliminaire

1 Ne pas oublier de justifier que $|||\ \cdot\ |||$ est bien définie.

2 Commencer par justifier que $\|\mathrm{AX}\| \leqslant |||\mathrm{A}||| \cdot \|\mathrm{X}\|$ pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$.

Partie I

3 Utiliser simplement le théorème 1 admis.

4.a Raisonner par l'absurde en supposant l'existence d'un réel t tel que $y(t) \notin \,]\,0\,;b\,[$. Démontrer qu'alors, y prend soit la valeur 0, soit la valeur b. En déduire que y est constante à l'aide d'un problème de Cauchy bien choisi.

4.b Utiliser la question précédente pour séparer les variables dans l'équation différentielle, puis intégrer.

4.c Calculer l'intégrale de la question 4.c à l'aide d'une décomposition en éléments simples.

Pour démontrer que $\mathrm{I} = \mathbb{R}$, justifier que si ce n'est pas le cas, on peut prolonger y et contredire sa maximalité.

4.d Immédiat si vos calculs du 4.c sont corrects.

Partie II

5 User et abuser du théorème 1.

6.a Exprimer les vecteurs colonnes de $e_{\mathrm{A}}(t)$ comme des solutions de (L) pour des conditions initiales bien choisies.

6.b On pourra considérer le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \mathrm{Z}' = \mathrm{AZ} \\ \mathrm{Z}(0) = \mathrm{Y}(s) \end{cases}$$

où Y est l'unique solution maximale de (L).

6.c Utiliser la question précédente avec $s = -t$.

7.a Introduire le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \mathrm{Z}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{APZ} \\ \mathrm{Z}(0) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{Y}_0 \end{cases}$$

7.b Remarquer que lorsque A est diagonale, le système (L) se résout immédiatement.

7.c La matrice A est diagonalisable. Combiner les résultats des question 7.a et 7.b.

8.a Vérifier que la fonction suggérée par l'énoncé est décroissante.

8.b Pour la majoration sur $\mathbb{R}_+$, intégrer l'égalité $e_{\mathrm{A}}' = \mathrm{A}e_{\mathrm{A}}$ entre 0 et t puis appliquer le lemme précédent.

Pour la majoration sur $\mathbb{R}_-$, considérer $t \longmapsto e_{\mathrm{A}}(-t)$.

9.a Calculer Z' et $\mathrm{Z}(0)$.

9.b Utiliser le théorème 1.

10.a Exprimer y en fonction de g. On pourra travailler avec $\varepsilon > 0$ et se placer sur un intervalle sur lequel $|g(t)| \leqslant \varepsilon e^{-at}$.

10.b Pour A triangulaire supérieure, écrire le système sous la forme de $n-1$ équations différentielles de la forme de celle de la question précédente, et d'une dernière équation de résolution immédiate.

10.c Se ramener au cas où A est triangulaire supérieure à l'aide des question 2 et 7.a. Utiliser ensuite la question précédente. On pourra démontrer que pour toute matrice M de vecteurs colonnes $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_n$

$$|||\mathrm{M}||| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|\mathrm{C}_i\|$$

11.a Appliquer le cours sur les polynômes d'endomorphismes (ne pas oublier que A est réelle !).

11.b Commencer par démontrer que A est antisymétrique, puis que X et AX sont orthogonaux pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$. Démontrer ensuite que la norme de $e_{\mathrm{A}}(t)\mathrm{X}_0$ est indépendante de t, quel que soit le vecteur X_0 choisi.

Partie III

12.a Utiliser la composition des limites.

12.b Intégrer la minoration précédente.

12.c Vérifier que $\langle \mathrm{Y}'(t) \mid f(\ell) \rangle$ est à la fois bornée et de limite $+\infty$ en $+\infty$.

13.a Étudier $q = y + iz$.

13.b Remarquer que $\left(\|\mathrm{Y}\|^2\right)' = 2\langle \mathrm{Y}' \mid \mathrm{Y} \rangle$ et calculer cette quantité pour obtenir une équation à variables séparables satisfaite par $\|\mathrm{Y}^2\|$.

Pour résoudre cette équation, justifier que φ est identiquement nulle ou ne s'annule jamais à l'aide d'un problème de Cauchy.

13.c Reprendre les calculs précédents et constater cette fois une divergence de $\|\mathrm{Y}\|$ en T.

14.a Revenir à la définition de $\mathrm{J}_f(0)$ à l'aide des dérivées suivant un vecteur.

14.b Écrire (S) sous la forme

$$\begin{cases} \mathrm{Y}' = \mathrm{AY}(t) + g(t) \\ \mathrm{Y}(0) = \mathrm{Y}_0 \end{cases}$$

puis appliquer 9.a et 10.c.

14.c C'est la question la plus délicate du sujet. Fixer $\varepsilon > 0$ pour lequel

$$\forall \mathrm{X} \in \mathbb{R}^n, \qquad \|\mathrm{X}\| \leqslant \rho \Longrightarrow \|f(\mathrm{X}) - \mathrm{AX}\| \leqslant \varepsilon \|\mathrm{X}\|$$

Prendre ensuite $\|\mathrm{Y}_0\|$ inférieure à $\rho/2$ et utiliser la continuité de Y pour appliquer la question 14.b. Utiliser ensuite 8.a pour aboutir à une majoration de la forme souhaitée au voisinage de 0. Il ne reste plus qu'à vous débrouiller pour choisir ε et δ de façon à ce que la majoration reste valable sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

14.d Faire un changement de variable pour se ramener en $(0,0)$ puis appliquer 14.c.

Préliminaire

1 Pour toute matrice A, l'application $\varphi_{\mathrm{A}} : \mathrm{X} \longmapsto \|\mathrm{AX}\|$ est la composée de

$$\mathrm{A} : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathrm{X} \longmapsto \mathrm{AX} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \|\cdot\| : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \mathrm{Z} \longmapsto \|\mathrm{Z}\| \end{cases}$$

La première fonction (notée A par abus de notation) est linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie, la seconde est une norme donc une application 1-lipschitzienne. Il s'agit ainsi de deux applications continues, et leur composée φ_{A} l'est également.

Par ailleurs, la boule unité fermée est un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^n$, donc un compact. Il s'ensuit que φ_{A} est bornée sur cette boule, et que l'image $\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}(0,1))$, partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, a une borne supérieure. L'application $|||\cdot||| : \mathrm{A} \longmapsto |||\mathrm{A}|||$ est donc bien définie (et clairement à valeurs dans $\mathbb{R}_+$). Vérifions les trois propriétés qui interviennent dans la définition d'une norme.

- Pour toute matrice A et tout réel λ, on a
$$\{\|(\lambda\mathrm{A})\mathrm{X}\|,\ \|\mathrm{X}\| \leqslant 1\} = |\lambda|\ \{\|\mathrm{AX}\|,\ \|\mathrm{X}\| \leqslant 1\}$$
En particulier, en passant aux bornes supérieures, il vient $|||\lambda\mathrm{A}||| = |\lambda|\ |||\mathrm{A}|||$. L'application $|||\cdot|||$ vérifie donc la propriété de positive homogénéité.
- Si A est une matrice telle que $|||\mathrm{A}||| = 0$, alors notamment $\|\mathrm{AX}\| = 0$ pour tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ de norme inférieure ou égale à 1. Par linéarité, cette égalité s'étend à $\mathbb{R}^n$ tout entier et $\operatorname{Ker} \mathrm{A} = \mathbb{R}^n$ donc A est la matrice nulle. Ainsi, $|||\cdot|||$ vérifie la propriété de séparation.
- Soient A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout vecteur X de norme inférieure ou égale à 1, on a par inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|$
$$\|(\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{X}\| \leqslant \|\mathrm{AX}\| + \|\mathrm{BX}\| \leqslant |||\mathrm{A}||| + |||\mathrm{B}|||$$
En passant à la borne supérieure sur X, il vient
$$|||\mathrm{A}+\mathrm{B}||| \leqslant |||\mathrm{A}||| + |||\mathrm{B}|||$$
Par conséquent, $|||\cdot|||$ vérifie l'inégalité triangulaire.

$$\boxed{\text{L'application } |||\cdot||| \text{ est une norme sur } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

> Une norme définie de cette manière s'appelle une norme matricielle subordonnée. Elle dépend bien entendu du choix de la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$. Pour les trois exemples usuels suivants
>
> $$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)^{1/2} \qquad \text{et} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$$
>
> on obtient par cette définition les trois normes suivantes sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
>
> $$|||\mathrm{A}|||_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}| \qquad |||\mathrm{A}|||_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}|$$
>
> et enfin pour la norme euclidienne (norme $\|\cdot\|_2$), c'est-à-dire celle de l'énoncé,
>
> $$|||\mathrm{A}|||_2 = \max_{\rho\in\mathrm{Sp}({}^t\mathrm{AA})} |\rho|^{1/2}$$