Mines Maths 2 PC 2012 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Benoît Landelle (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Romain Cosset (Professeur agrégé) et par Guillaume Dujardin (Chercheur INRIA).

Le sujet propose l'étude de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad \text{sur} \qquad]\,0\,;\pi\,[\,\times\,]\,0\,;+\infty\,[$$

C'est un problème très classique et très célèbre puisque c'est ce problème qui a motivé le mathématicien et physicien Joseph Fourier à introduire les séries trigonométriques qui portent désormais son nom. L'épreuve se compose de quatre parties.

- Dans une première partie, on s'intéresse à la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. On procède à une étude qualitative des solutions en fonction d'un paramètre et on établit certaines propriétés sur l'énergie de la solution. Cette partie est indépendante des autres même si certaines techniques qui y sont déployées réapparaissent à la toute dernière question du problème.
- La deuxième partie propose une mise en œuvre très classique de la théorie de Fourier. On y établit des relations entre les coefficients de Fourier $c_n(\varphi)$ d'une fonction φ avec ceux de sa dérivée généralisée. On procède alors au calcul de ces coefficients et on précise le mode de convergence de la série de Fourier.
- Dans la troisième partie, on construit explicitement une solution à l'équation de la chaleur avec condition initiale et conditions aux limites. La solution est construite comme une série de fonctions dont on établit certaines propriétés. Cette partie est hélas lourdement entachée de notions hors-programme alors que les propriétés à démontrer peuvent s'obtenir en restant dans le cadre du programme de PC.
- Dans la dernière partie, on démontre l'unicité de la solution de l'équation de la chaleur avec condition initiale et conditions aux limites. Une première approche consiste à mettre en œuvre le principe du maximum en s'appuyant sur des techniques de calcul différentiel. Certaines questions sont très difficiles et requièrent une grande aisance avec les notions du programme. Dans une dernière question, une autre approche est suggérée, mais elle s'avère toutefois impraticable du fait d'hypothèses non adaptées.

Le sujet est un peu décevant. L'enjeu du problème qu'est la résolution de l'équation de la chaleur est un défi passionnant mais les multiples maladresses de l'énoncé, notamment les incursions hors-programme, dénaturent le travail de recherche du candidat. Cependant, ce sujet constitue un très bon problème d'entraînement et permet d'apprendre à réagir face à des imprévus dans un énoncé.

Indications

Un problème aux valeurs propres

1 Écrire v'' en fonction de v et raisonner par récurrence.
Utiliser une intégration par parties.

2 Distinguer $\lambda < 0$ et $\lambda = 0$.

3 Procéder par condition nécessaire et suffisante.

La série de Fourier de la condition initiale

6 Vérifier que φ est $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

7 Introduire la fonction paire ϕ' coïncidant avec Φ' sur $]\,(2k-1)\pi/2\,;(2k+1)\pi/2\,[$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et nulle ailleurs.

Construction d'une solution de (1)-(2)-(3)

10 Pour (x_1, t_1) et (x_2, t_2) dans $[\,0\,;\pi\,] \times [\,0\,;+\infty\,[$, montrer que

$$|u(x_1,t_1) - u(x_2,t_2)| \leqslant \left| \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n(x_1,t_1) - u_n(x_2,t_2) \right| + 2\mathrm{R}_{\mathrm{N}}$$

avec $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathrm{R}_{\mathrm{N}} = 0$.

11 Considérer une sous-suite de $\left(\dfrac{\partial u_n}{\partial t} \left(\dfrac{\pi}{2}, 0 \right) \right)_{n\geqslant 1}$.

12 Première question hors-programme puis remarquer que $\delta > 0$ est quelconque pour la question suivante.

13 Question hors-programme.

Unicité de la solution

15 Supposer $h''(\alpha) > 0$ et aboutir à une contradiction.

17 Utiliser la nature topologique de $\mathcal{D}$ pour l'existence du maximum puis supposer par l'absurde que celui-ci est atteint dans l'ouvert $\mathcal{D}_i$ ou sur l'intervalle $\mathcal{C}$. Établir le lien avec les questions 15 et 16 pour obtenir une contradiction.

18 Comparer le maximum de u sur $\mathcal{D}$ avec le maximum de u sur $\mathcal{F}$ puis avec le maximum de v_ε sur $\mathcal{F}$ et faire tendre $\varepsilon \to 0$.

19 Si u et v sont deux solutions de (**1**)-(**2**)-(**3**), remarquer que $u - v$ vérifie (**1**) ce qui suffit pour appliquer le résultat de la question 18.

20 Les hypothèses du sujet sont insuffisantes pour répondre. On pourra alors se permettre d'ajouter celles qui nous manquent.

1. Un problème aux valeurs propres

1 Par hypothèse, si v est solution de (**5**), alors v est deux fois dérivable sur $[\,0\,;\pi\,]$ donc sur $]\,0\,;\pi\,[$ et on a

$$v'' = -\lambda v$$

Comme v est deux fois dérivable sur $]\,0\,;\pi\,[$, il s'ensuit que v'' est deux fois dérivable sur $]\,0\,;\pi\,[$ et une récurrence immédiate permet alors de montrer que v est dérivable sur $]\,0\,;\pi\,[$ à l'ordre $2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit

$$\boxed{v \in \mathscr{C}^\infty(]\,0\,;\pi\,[\,,\mathbb{R})}$$

> On peut tenir le même raisonnement sur $[\,0\,;\pi\,]$ et obtenir $v \in \mathscr{C}^\infty([\,0\,;\pi\,]\,,\mathbb{R})$.

Comme $(x \mapsto v(x))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;\pi\,]$ car deux fois dérivable sur $[\,0\,;\pi\,]$, on obtient en intégrant par parties

$$\int_0^\pi v''(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [v'(x)v(x)]_0^\pi - \int_0^\pi v'(x)^2\,\mathrm{d}x$$

Or $v(0) = v(\pi) = 0$ et par conséquent

$$\boxed{\int_0^\pi v''(x)v(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^\pi v'(x)^2\,\mathrm{d}x}$$

Comme v est solution de (**5**), on a $v'' = -\lambda v$ et par suite

$$\int_0^\pi v''(x)v(x)\,\mathrm{d}x = -\lambda\int_0^\pi v(x)^2\,\mathrm{d}x$$

Si v n'est pas identiquement nulle, comme v est continue sur $[\,0\,;\pi\,]$, la fonction v^2 est continue positive non identiquement nulle sur $[\,0\,;\pi\,]$ et le caractère défini de l'intégrale donne

$$\int_0^\pi v(x)^2\,\mathrm{d}x > 0$$

Par suite $$\int_0^\pi v''(x)v(x)\,\mathrm{d}x = -\lambda\int_0^\pi v(x)^2\,\mathrm{d}x = -\int_0^\pi v'(x)^2\,\mathrm{d}x$$

soit $$\lambda = \left(\int_0^\pi v'(x)^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^\pi v(x)^2\,\mathrm{d}x\right)^{-1}$$

Ainsi, on conclut que $$\boxed{\lambda \geqslant 0}$$

2 L'équation (**5**) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractéristique est

$$r^2 + \lambda = 0$$

- Si $\lambda < 0$, cette équation admet les solutions réelles distinctes $\pm\sqrt{-\lambda}$. Par suite

$$\boxed{\lambda < 0 \Longrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall x \in [\,0\,;\pi\,] \qquad v(x) = \alpha\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x} + \beta\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x}}$$

La relation (**6**) donne

$$v(0) = v(\pi) = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} \alpha + \beta & = 0 \\ \alpha \mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\pi} + \beta \mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\pi} & = 0 \end{cases}$$

$$\text{soit} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\pi} & \mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\pi} & \mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\pi} \end{vmatrix} = -2 \,\mathrm{sh}\,(\sqrt{-\lambda}\pi)$$

Pour $\lambda < 0$, on a $\mathrm{sh}\,(\sqrt{-\lambda}\pi) \neq 0$ donc le système en (α, β) est de Cramer et $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ en est l'unique solution.

• Si $\lambda = 0$, l'équation $v'' = 0$ implique que v est affine c'est-à-dire

$$\boxed{\lambda = 0 \Longrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall x \in [\,0\,;\pi\,] \qquad v(x) = \alpha + \beta x}$$

Les conditions $v(0) = v(\pi) = 0$ donnent immédiatement $(\alpha, \beta) = (0, 0)$. En conclusion

$$\boxed{\text{Si } \lambda \leqslant 0, \text{ alors le système } (\mathbf{5})\text{-}(\mathbf{6}) \text{ admet la solution nulle pour unique solution.}}$$

> Il n'est pas indispensable de résoudre (**5**) pour répondre à la question. Dans la première question, on a démontré que pour v solution de (**5**)-(**6**)
>
> $$v \text{ non nulle} \Longrightarrow \lambda \geqslant 0$$
>
> Par contraposée, v est nulle lorsque $\lambda < 0$ et il ne reste que le cas $\lambda = 0$ à discuter.

3 Procédons par double implication. Par contraposée du résultat de la question précédente, si le système (**5**)-(**6**) admet une solution v non nulle, alors $\lambda > 0$. Les racines de l'équation caractéristique de (**5**) sont complexes conjuguées

$$r^2 + \lambda = 0 \iff r \in \left\{ \pm\, \mathrm{i}\sqrt{\lambda} \right\}$$

Ainsi, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in [\,0\,;\pi\,] \qquad v(x) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Les conditions initiales donnent

$$v(0) = v(\pi) = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} \alpha & = 0 \\ \alpha \cos(\sqrt{\lambda}\pi) + \beta \sin(\sqrt{\lambda}\pi) & = 0 \end{cases}$$

$$\text{soit} \qquad \begin{cases} \alpha & = 0 \\ \beta \sin(\sqrt{\lambda}\pi) & = 0 \end{cases}$$

Si le système (**5**)-(**6**) admet une solution non nulle, le système en (α, β) n'est pas de Cramer sans quoi la seule solution serait la solution nulle. Ainsi, $\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$. Or,

$$\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \qquad \iff \qquad \exists n \in \mathbb{N}^* \mid \lambda = n^2$$

Réciproquement, s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = n^2$, il est immédiat que $v(x) = \sin(nx)$ pour tout $x \in [\,0\,;\pi\,]$ est une solution non nulle du système (**5**)-(**6**). En conclusion

$$\boxed{(\mathbf{5})\text{-}(\mathbf{6}) \text{ possède une solution non nulle } \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \mid \lambda = n^2}$$