Centrale Physique MP 2012 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Stanislas Antczak (Professeur agrégé) ; il a été relu par Tom Morel (ENS Cachan) et Vincent Freulon (ENS Ulm).

Ce sujet, composé de trois parties indépendantes, traite de différentes questions physiques liées à un satellite, en l'occurrence le satellite océanographique Jason 2, lancé en 2008.

- La première partie traite des aspects mécaniques de l'orbite du satellite et des perturbations dues à l'aplatissement de la Terre. Elle débute par des questions de cours, puis conduit à la démonstration de la trajectoire conique du satellite à l'aide du vecteur de Runge-Lenz. C'est relativement classique, mais assez calculatoire et il faut maîtriser les coordonnées sphériques. Ensuite, la question de l'écart à la trajectoire keplerienne du fait de l'aplatissement de la Terre est traitée, de manière guidée, à tel point qu'il est possible de répondre à bien des questions sans en comprendre réellement le sens. Cette partie est certainement la plus difficile du sujet : elle nécessite une grande vigilance dans les calculs et des capacités de repérage dans l'espace.
- La deuxième partie concerne la diffusion des ondes radar par l'océan, en la traitant à l'aide de l'expression de l'amplitude diffractée à l'infini. Elle débute par des questions de cours (diffraction par un carré), puis les prolonge avec un facteur de transmission. Les calculs sont ici aussi relativement guidés.
- Enfin, la troisième partie étudie la communication entre le satellite et les stations au sol. Elle pose des questions de cours assez nombreuses et termine par le problème très classique de la détermination de la pulsation plasma en utilisant un modèle microscopique simple. Cette partie est, elle aussi, très guidée.

La difficulté globale de ce sujet est moyenne, ce qui cache de fortes disparités : d'un côté, les questions de cours, nombreuses et variées, et de l'autre, certaines questions, formulées de manière abrupte, mais nécessitant des calculs parfois fastidieux. Peu de réelles difficultés théoriques, hormis celles résultant de la vision dans l'espace dans la première partie.

Pour autant, il faut être à la fois rapide et précis. Répondre à une question de cours ne souffre aucune approximation, et une erreur dans un long calcul peut se répercuter très longtemps après. Certes, des résultats sont donnés régulièrement et permettent de détecter ces erreurs, mais leur recherche peut faire perdre du temps. Il importe donc de rester rigoureux de bout en bout, quitte à sauter certaines questions de la première partie si elles déconcertent trop.

Indications

Partie I

I.A.3.a Exprimer d'abord $\overrightarrow{\sigma_{\mathrm{T}}}$ en coordonnées sphériques, puis calculer la dérivée de $\overrightarrow{\mathrm{R}}$. Se souvenir que

$$\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u}_{\mathrm{TS}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_\theta}$$

I.B.1 Pour le calcul de $|g_\theta/g_r|$, se contenter d'évaluer les ordres de grandeur du dénominateur et du numérateur.

I.B.2 Utiliser les coordonnées de g_r et g_θ obtenues à la question précédente.

I.B.3 Le moment cinétique est dirigé suivant $\overrightarrow{\mathrm{Z}}$, défini à la figure 2.a : exprimer ce vecteur dans la base cartésienne.

I.B.4 Le vecteur $\overrightarrow{\Omega}$ est le vecteur rotation de la ligne des nœuds (N′N).

I.B.5 De quel angle tourne la ligne des nœuds pendant $\mathrm{T_R}$? Et la Terre ? Quel est le lien entre ces deux angles si la Terre fait k tours complets pendant $\mathrm{T_R}$?

Partie II

II.A.1 Donner l'expression du vecteur $\overrightarrow{u}'$ avant de calculer l'amplitude diffractée.

II.B.2 Exprimer $\underline{t}(\mathrm{P})$ avec le cosinus en notation complexe, puis exprimer l'amplitude diffractée sous forme de trois termes. Le calcul n'est pas demandé, il suffit de faire apparaître les directions de propagation.

Partie III

III.A.6 Calculer le vecteur de Poynting avec les expressions réelles des champs.

III.C.2 Écrire la deuxième loi de Newton appliquée à un électron, en utilisant la dépendance en $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\omega t}$ du champ électrique.

III.C.3 La puissance fournie aux électrons est $\mathrm{P} = \overrightarrow{\jmath} \cdot \overrightarrow{\mathrm{E}}$.

III.C.6.e La vitesse de groupe est $v_{\mathrm{g}} = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k_1$.

I. Le satellite Jason 2

I.A.1 La force gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite est

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{F}} = -\mathrm{G}\,\frac{m\,\mathrm{M_T}}{r^2}\,\overrightarrow{u}_{\mathrm{TS}}}$$

I.A.2.a Le référentiel géocentrique est lié au centre de la Terre et en translation par rapport aux étoiles lointaines. Il n'est pas galiléen car il n'est pas en translation rectiligne et uniforme par rapport au référentiel de Copernic, supposé galiléen.

> Le référentiel géocentrique peut être considéré comme galiléen pour étudier des mouvements de durée assez faible pour que son mouvement dans le référentiel de Copernic puisse être considéré comme rectiligne et uniforme.
> Le référentiel de Copernic n'est pas rigoureusement galiléen, vu qu'il est en translation non rectiligne uniforme dans le référentiel galactocentrique. La période de révolution du Soleil dans la Voie Lactée est d'environ 200 millions d'années : le référentiel de Copernic peut donc être considéré comme galiléen avec une bonne approximation.

I.A.2.b Une grandeur mécanique du satellite qui se conserve est son **moment cinétique**. En effet, le théorème du moment cinétique dans le référentiel $\mathcal{R}_{\mathrm{g}}$ s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_{\mathrm{T}}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathrm{TS}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{F}} = \overrightarrow{0}$$

donc le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_{\mathrm{T}}}$ du satellite par rapport au point T est constant. Comme $\overrightarrow{\sigma_{\mathrm{T}}} = \overrightarrow{\mathrm{TS}} \wedge m\,\overrightarrow{v}$, où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse du point S dans le référentiel géocentrique, il en résulte que **le mouvement est plan**.

Par ailleurs, **l'énergie mécanique est constante** car l'unique force qui s'exerce sur le satellite, $\overrightarrow{\mathrm{F}}$, est conservative.

I.A.3.a Comme la trajectoire est plane, on peut décrire le mouvement dans le plan de la trajectoire à l'aide des coordonnées polaires. Exprimons tout d'abord le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_{\mathrm{T}}}$ dans la base $(\overrightarrow{u}_{\mathrm{TS}},\ \overrightarrow{u_\alpha},\ \overrightarrow{u_z})$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\sigma_{\mathrm{T}}} &= \overrightarrow{\mathrm{TS}} \wedge m\,\overrightarrow{v} \\
&= r\,\overrightarrow{u}_{\mathrm{TS}} \wedge m\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u}_{\mathrm{TS}} + r\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_\alpha}\right) \\
\overrightarrow{\sigma_{\mathrm{T}}} &= m\,r^2\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_z}
\end{aligned}$$

L'expression de $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}t}$ comporte trois termes :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{\sigma_{\mathrm{T}}} + \overrightarrow{v} \wedge \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_{\mathrm{T}}}}{\mathrm{d}t} - \mathrm{G}\,\mathrm{M_T}\,m\,\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u}_{\mathrm{TS}}}{\mathrm{d}t}$$

Le deuxième est nul car $\overrightarrow{\sigma_\mathrm{T}}$ est constant. Compte tenu de la deuxième loi de Newton, le premier terme s'écrit

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{\sigma_\mathrm{T}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{F}}}{m} \wedge \overrightarrow{\sigma_\mathrm{T}} \\
&= -\mathrm{G}\,\frac{\mathrm{M_T}}{r^2}\,\overrightarrow{u}_\mathrm{TS} \wedge m\,r^2\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_z} \\
&= \mathrm{G}\,\mathrm{M_T}\,m\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_\alpha} \\
\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{\sigma_\mathrm{T}} &= \mathrm{G}\,\mathrm{M_T}\,m\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}_\mathrm{TS}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

Finalement, le premier terme de la dérivée de $\overrightarrow{\mathrm{R}}$ est égal à l'opposé du troisième, d'où

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{0}}$$

Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{R}}$ est **un vecteur constant** tout au long du mouvement du satellite.

I.A.3.b Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{R}}$ est la somme d'un vecteur contenu dans le plan de l'orbite (parallèle à $\overrightarrow{u}_\mathrm{TS}$) et d'un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{\sigma_\mathrm{T}}$, lui-même orthogonal au plan de l'orbite. Par conséquent,

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{R}} \text{ est contenu dans le plan de l'orbite du satellite.}}$$

I.A.3.c Exprimons le terme $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\sigma_\mathrm{T}}$ apparaissant dans $\overrightarrow{\mathrm{R}}$:

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\sigma_\mathrm{T}} = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u}_\mathrm{TS} + r\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_\alpha}\right) \wedge \left(m\,r^2\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_z}\right)$$

On en déduit
$$(v \wedge \overrightarrow{\sigma_\mathrm{T}}) \cdot \overrightarrow{u}_\mathrm{TS} = m\,r^3\,\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

Ceci est égal au premier terme du deuxième membre de l'égalité proposée. En effet, d'après l'expression de $\overrightarrow{\sigma_\mathrm{T}}$ déterminée à la question I.A.3.a,

$$\frac{{\sigma_\mathrm{T}}^2}{m\,r} = m\,r^3\,\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

Finalement, on obtient bien l'égalité

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{R}} \cdot \overrightarrow{u}_\mathrm{TS} = \frac{{\sigma_\mathrm{T}}^2}{m\,r} - \mathrm{G}\,\mathrm{M_T}\,m}$$

Ce produit scalaire peut également s'écrire $\overrightarrow{\mathrm{R}} \cdot \overrightarrow{u}_\mathrm{TS} = \mathrm{R}\,\cos\beta$. Il vient

$$\mathrm{R}\,\cos\beta = \frac{{\sigma_\mathrm{T}}^2}{m\,r} - \mathrm{G}\,\mathrm{M_T}\,m$$

d'où
$$r = \frac{{\sigma_\mathrm{T}}^2/m}{\mathrm{G}\,\mathrm{M_T}\,m + \mathrm{R}\,\cos\beta}$$

Ceci peut se mettre sous la forme de l'équation d'une conique :

$$\boxed{r(\beta) = \frac{p}{1 + e\,\cos\beta} \qquad \text{avec} \qquad p = \frac{{\sigma_\mathrm{T}}^2}{\mathrm{G}\,\mathrm{M_T}\,m^2} \qquad \text{et} \qquad e = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{G}\,\mathrm{M_T}\,m}}$$