E3A Physique PSI 2011 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Michel Fruchart (ENS Lyon) ; il a été relu par Tom Morel (ENS Cachan) et Emmanuel Bourgeois (Professeur en CPGE).

Sous couvert de modéliser un silencieux automobile, ce sujet étudie la propagation et la réflexion d'une onde acoustique dans un fluide parfait. Les trois parties sont relativement indépendantes. Dans les deux premières, des résultats intermédiaires sont régulièrement donnés pour éviter de rester bloqué.

- La première partie consiste à retrouver des résultats de cours : il s'agit d'étudier la propagation d'une onde dans un tuyau sonore, en introduisant la notion d'impédance et en calculant des intensités sonores.
- La deuxième partie est composée de deux exercices très classiques que sont la réflexion en incidence normale et le pavillon exponentiel. Ce dernier, qui assure l'adaptation d'impédance, c'est-à-dire un transfert important de l'onde sonore, permet d'illustrer l'effet d'une discontinuité de section seule. Ceci aide à comprendre le principe du filtre acoustique de la partie suivante.
- La troisième partie traite d'une réalisation du silencieux sous la forme d'un tube de grande section inséré dans la conduite. On aboutit à un système linéaire 4×4. Sans être difficile, la résolution de ce système prend un peu de temps et on aurait pu s'attendre à ce que l'énoncé fournisse le résultat.

Pour les applications numériques, l'énoncé fournit les ordres de grandeurs des termes les plus difficiles à évaluer, ce qui permet de tester la cohérence de ses résultats. Le jury fait également remarquer dans son rapport que « les réponses à un certain nombre de questions sont implicitement contenues dans les textes explicatifs ».

Indications

Première partie

A.3 Utiliser l'expression de la compressibilité isentropique donnée au début de la première partie, et passer aux différences finies.

A.5 Différentier la loi de Laplace à entropie constante.

A.6 La célérité d'une onde sonore dans un solide de module d'Young E et de masse volumique μ_{sol} se comporte comme

$$\mathrm{C}_{\text{sol}} \sim \sqrt{\frac{\mathrm{E}}{\mu_{\text{sol}}}}$$

B.3 Faire attention aux signes dans le cas d'une onde se propageant en sens inverse.

C.2 Utiliser les expressions rappelées par l'énoncé pour travailler avec les grandeurs acoustiques complexes.

C.5 Les deux sources sont incohérentes.

Deuxième partie

D.1 Intégrer l'équation obtenue en A.3. Les éventuelles constantes d'intégration sont nulles car on ne s'intéresse qu'aux termes variant dans le temps et l'espace.

D.2 Le sujet n'est pas très clair sur ce point, mais les puissances transportées sont habituellement définies comme des projections sur la direction de propagation, de manière à être positives.

D.3 Utiliser la conservation du débit massique $\mu(x,t)\mathrm{S}(x)v(x,t)$ à travers l'interface située en $x = 0$ et exprimer la relation obtenue en fonction des surpressions grâce aux impédances. L'autre condition limite s'obtient en appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'interface en $x = 0$, d'épaisseur nulle.

E.1 Comme à la question A.3, il faut se servir de la définition du coefficient de compressibilité isentropique.

E.6 La relation de dispersion est une équation du second degré sur k. Le signe de son discriminant détermine les différents cas.

E.9 Recourir à la notion d'impédance.

E.10 Montrer que $\mathscr{P}(x)$ ne dépend pas de ω. Que peut-on en déduire ?

Troisième partie

F.2 Utiliser la question D.3.

F.4 Penser à la relation $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$.

F.5 La finesse est le rapport de la fréquence caractéristique par la bande passante (la largeur à mi-hauteur d'un pic).

F.7 Se placer dans le cas limite $m \gg 1$.

I. Onde acoustique dans un fluide parfait

A. Célérité du son

A.1 Considérons une tranche de fluide située entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$, de masse $\mathrm{d}m = \mu_0\, \mathrm{S}_0\, \mathrm{d}x$. Sa vitesse est $v(x,t)$ et elle subit des forces de pression de la part du fluide à sa gauche en x et à sa droite en $x + \mathrm{d}x$. La projection selon $\overrightarrow{e_x}$ du principe fondamental de la dynamique appliqué à cette tranche s'écrit

$$\mathrm{d}m \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \left[-\mathrm{P}(x + \mathrm{d}x, t) + \mathrm{P}(x,t)\right] \mathrm{S}_0$$

Or,
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\,\frac{\partial v}{\partial x} \approx \frac{\partial v}{\partial t}$$

au premier ordre en la vitesse. Remplaçons de plus $\mathrm{P}(x,t)$ par $\mathrm{P}_0 + p(x,t)$ (et de même en $x + \mathrm{d}x$) pour obtenir

$$\mathrm{d}m \frac{\partial v}{\partial t} = \left[-p(x + \mathrm{d}x, t) + p(x,t)\right] \mathrm{S}_0$$

soit
$$\mu_0\, \mathrm{S}_0\, \mathrm{d}x \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{S}_0$$

ce qui établit l'équation différentielle liant pression et vitesse

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t}}$$

A.2 Projetons l'équation d'Euler projetée sur $\overrightarrow{e_x}$:

$$\mu \left[\frac{\partial v}{\partial t} + v\,\frac{\partial v}{\partial x}\right] = -\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

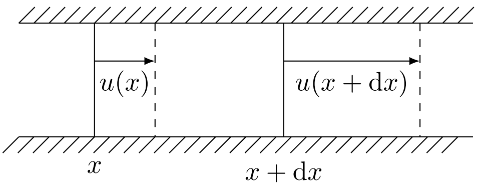
avec $\mu = \mu_0 + \mu_1(x,t)$. Tous les termes en μ_1 ainsi que le terme $\mu_0 v\,(\partial v/\partial x)$ sont du second ordre, alors que $\mu_0(\partial v/\partial t)$ est du premier ordre, de même que le gradient de pression. Négligeons les termes d'ordre 2 pour obtenir l'équation linéarisée

$$\boxed{\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}}$$

Il est logique d'obtenir le même résultat puisque l'équation d'Euler est l'écriture locale du principe fondamental de la dynamique.

Le rapport du jury insiste sur la nécessité de préciser par rapport à quoi un certain terme est un infiniment petit. Ici, les grandeurs dites du premier ordre sont les grandeurs acoustiques (la surpression p, la variation de masse volumique μ_1, et la vitesse v). Les quantités du second ordre sont les produits de deux grandeurs acoustiques, et ainsi de suite. Les quantités qui ne font pas apparaître les grandeurs acoustiques sont dites d'ordre zéro.

A.3 Représentons l'évolution de la tranche fluide considérée entre son état de repos et un état perturbé :



À l'état de repos, le volume de la tranche de fluide est

$$\mathrm{S}_0\big[(x+\mathrm{d}x)-x\big]=\mathrm{S}_0\mathrm{d}x=\mathrm{V}$$

tandis qu'à l'état perturbé il devient

$$\mathrm{S}_0\Big[\big(x+\mathrm{d}x+u(x+\mathrm{d}x,t)\big)-\big(x+u(x,t)\big)\Big]=\mathrm{S}_0\mathrm{d}x\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\mathrm{V}+\delta\mathrm{V}$$

L'accroissement relatif du volume de la tranche fluide est la différence entre ces grandeurs rapportée à la grandeur de repos, c'est-à-dire

$$\boxed{\delta=\frac{\delta\mathrm{V}}{\mathrm{V}}=\frac{\partial u}{\partial x}}$$

Le coefficient de compressibilité isentropique est défini par

$$\chi_{\mathrm{s}}=-\frac{1}{\mathrm{V}}\left(\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial\mathrm{P}}\right)_{\mathrm{S}}$$

Remplaçons la dérivée partielle par un taux d'accroissement, sachant que l'évolution du fluide est isentropique :

$$\chi_{\mathrm{s}}=-\frac{1}{\mathrm{V}}\frac{\delta\mathrm{V}}{\delta\mathrm{P}}$$

L'accroissement de pression $\delta\mathrm{P}$ par rapport à l'équilibre est la pression acoustique p. Ainsi, le coefficient de compressibilité isentropique s'écrit

$$\chi_{\mathrm{s}}=-\frac{\delta}{p}$$

ce qui, en utilisant l'expression de δ en fonction du déplacement, donne

$$\boxed{p(x,t)=-\frac{1}{\chi_{\mathrm{s}}}\frac{\partial u}{\partial x}}$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t}&=-\frac{1}{\chi_{\mathrm{s}}}\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}\\&=-\frac{1}{\chi_{\mathrm{s}}}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\qquad\text{(théorème de Schwarz)}\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{1}{\chi_{\mathrm{s}}}\frac{\partial v}{\partial x}}$$

> L'énoncé encourage à raisonner sur le volume d'une tranche, puisqu'il introduit l'accroissement relatif δ. Si l'on veut éviter les grandeurs extensives, on peut utiliser l'équation de conservation de la masse
>
> $$\frac{\partial\mu}{\partial t}+\mathrm{div}\,(\mu\,\overrightarrow{v})=0$$