Mines Maths 1 PSI 2011 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jules Svartz (ENS Cachan) ; il a été relu par Vincent Leclère (École polytechnique) et Guillaume Dujardin (chercheur à l'INRIA).

Cette épreuve se compose de trois parties de tailles inégales. Celles-ci sont très liées, de sorte qu'aucune question n'est vraiment indépendante des autres.

- Dans la première partie, le but est d'établir l'inégalité de Prékopa et Leindler reliant les intégrales sur $\mathbb{R}$ de trois fonctions continues et intégrables vérifiant une inéquation fonctionnelle. L'idée est d'établir cette inégalité successivement pour les fonctions strictement positives, puis pour celles à support borné, et enfin d'en déduire le cas général. Pour ce faire, on utilise des techniques de convexité et d'analyse élémentaire.
- La deuxième partie (réduite à une question !) permet d'illustrer une définition qui interviendra à la toute fin de problème et qui a pour cadre $\mathbb{R}^n$, avec n quelconque, alors que dans le reste du problème l'espace considéré est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$.
- Enfin, la troisième partie étend les résultats de la première à des intégrales doubles et en donne une application géométrique dans l'expression d'une inégalité reliant les aires de certains ouverts du plan. Plus exactement, on montre que pour $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux ouverts bornés du plan et $\lambda \in \,]\,0\,;1\,[$, les aires $\mathrm{V}(\mathcal{A})$, $\mathrm{V}(\mathcal{B})$ et $\mathrm{V}(\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B})$ sont reliées par la formule

$$\mathrm{V}(\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}) \geqslant \mathrm{V}(\mathcal{A})^{\lambda}\mathrm{V}(\mathcal{B})^{1-\lambda}$$

Cet énoncé atypique est de difficulté soutenue tout au long du sujet. Néanmoins, l'enchaînement des questions est logique et bien guidé. La troisième partie exige de mobiliser son intuition géométrique pour bien comprendre ce dont il est question.

Indications

Partie I

1 Penser au logarithme pour la première partie de la question et raisonner à l'aide de la fonction $x \mapsto x^u$ pour la seconde partie.

2 Fixer une variable et faire une étude de fonction.

3 Se rappeler de la définition d'une intégrale sur un intervalle autre qu'un segment.

4 Utiliser la formule donnant la dérivée d'une fonction à partir de celle de sa fonction réciproque.

5 Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

6 On pourra utiliser le résultat de la question 1 avec $u = 2$.

7 Cette question et la suivante sont assez techniques, il ne faut pas avoir peur de se lancer dans des calculs ! On pourra distinguer les cas $|z| \leqslant \widehat{\mathrm{M}}$ et $z > \widehat{\mathrm{M}}$.

8 Développer le produit $f_\varepsilon^\lambda(x) g_\varepsilon^{1-\lambda}(y)$ en quatre termes et majorer chacun d'entre eux pour se ramener à l'expression donnée par l'énoncé, à l'aide d'une inégalité triangulaire.

9 Chercher à appliquer P-L à f_ε et g_ε et faire tendre ε vers 0.

10 Distinguer les cas $|x| < n+1$ et $|x| \geqslant n+1$.

11 Utiliser $\chi_n f$ et $\chi_n g$.

Partie II

12 Utiliser le théorème spectral et le résultat de la question 1.

Partie III

13 Raisonner en deux temps, tout d'abord avec une fonction partielle, c'est-à-dire en fixant une variable et ensuite avec les deux variables x et y.

14 Il s'agit de montrer que, pour f décrivant l'ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, la quantité

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

reste bornée indépendamment de f et qu'il existe une fonction f rendant cette quantité strictement positive.

15 Une intégrale pouvant être vue comme le calcul de « l'aire sous la courbe », une intégrale double peut être interprétée comme un volume. On pourra essayer de visualiser ce dont il est question.

16 Montrer que h est dans $\mathcal{C}(\lambda\mathcal{A}+(1-\lambda)\mathcal{B})$ et appliquer le résultat de la question 13.

17 Quelle inégalité relie les fonctions fu, gu, et hu ?

I. Une inégalité de Prékopa et Leindler.

> Dans tout le corrigé, λ désigne un réel de l'intervalle $]\,0\,;1\,[$ et nous adopterons la convention $0^\lambda = 0$, de sorte que $x \mapsto x^\lambda$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

1 Si l'un au moins des deux réels a ou b est nul, le terme de droite est nul, et comme le terme de gauche est positif, l'inégalité est démontrée. Sinon, a et b sont strictement positifs. La fonction ln, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ a pour dérivée la fonction $x \longmapsto 1/x$ décroissante. Ainsi ln est concave. On en déduit que

$$\ln(\lambda a + (1-\lambda)b) \geqslant \lambda \ln(a) + (1-\lambda)\ln(b)$$

En composant avec l'exponentielle, qui est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient

$$\boxed{\forall\, a, b \geqslant 0 \qquad \lambda a + (1-\lambda)b \geqslant a^\lambda b^{1-\lambda}}$$

Établissons maintenant la deuxième inégalité demandée. On remarque que si a ou b est nul, l'inégalité est vérifiée car $u > 1$, et de plus $\lambda \in\,]\,0\,;1\,[$, ainsi $\lambda^u \leqslant \lambda$ et $(1-\lambda)^u \leqslant 1-\lambda$. Supposons maintenant $a > 0$ et $b > 0$. Pour tout $u > 1$, la fonction

$$\varphi_u \colon \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^u \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ et vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\varphi_u'(x) = u x^{u-1} \qquad \text{et} \qquad \varphi_u''(x) = u(u-1)x^{u-2} \geqslant 0$$

Ainsi φ_u' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et φ est convexe. D'où

$$\boxed{\forall\, a, b \geqslant 0 \qquad (\lambda a + (1-\lambda)b)^u \leqslant \lambda a^u + (1-\lambda)b^u}$$

2 Si $a = 0$, l'inégalité à démontrer est évidente. Fixons $a > 0$ et considérons

$$f_a \colon \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ b \longmapsto (a+b)^\lambda - a^\lambda - b^\lambda \end{cases}$$

La fonction f_a est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $b > 0$

$$f_a'(b) = \lambda(a+b)^{\lambda-1} - \lambda b^{\lambda-1} = \lambda((a+b)^{\lambda-1} - b^{\lambda-1})$$

Comme $\lambda \in\,]\,0\,;1\,[$, $t \mapsto t^{\lambda-1}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, f_a' est négative car $a > 0$, et f_a est décroissante. C'est pourquoi, pour tout $b \geqslant 0$, $f_a(b) \leqslant f_a(0) = 0$, d'où

$$\boxed{\forall\, a, b \geqslant 0 \qquad (a+b)^\lambda \leqslant a^\lambda + b^\lambda}$$

3 Par stricte positivité de f sur $\mathbb{R}$, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$0 < \frac{1}{\mathrm{F}} \int_{-\infty}^{u} f(x)\,\mathrm{d}x < 1$$

ce qui justifie la définition suivante

$$\varphi_f \colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow\,]\,0\,;1\,[\\ u \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{F}} \displaystyle\int_{-\infty}^{u} f(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

La fonction φ_f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée f/F. Par conséquent, elle est strictement croissante. Montrons que φ_f a pour limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. Par définition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_{\mathrm{I}\text{ segment}\subset\mathbb{R}} \int_{\mathrm{I}} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_{\mathrm{M}>0} \int_{-\mathrm{M}}^{\mathrm{M}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

car tout segment est inclus dans un segment de la forme $[\,-\mathrm{M}\,;\mathrm{M}\,]$. Soit $\varepsilon>0$, il existe un réel $\mathrm{M}>0$ tel que

$$\frac{1}{\mathrm{F}}\int_{-\mathrm{M}}^{\mathrm{M}} f(x)\,\mathrm{d}x > 1-\varepsilon$$

La fonction φ_f étant croissante, on en déduit $\varphi_f(-\mathrm{M}) \leqslant \varepsilon$ et $\varphi_f(\mathrm{M}) \geqslant 1-\varepsilon$. Ceci étant valable pour tout ε, on a bien

$$\lim_{u\to-\infty}\varphi_f(u)=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{u\to+\infty}\varphi_f(u)=1$$

Ainsi, d'une part, pour tout t dans $]\,0\,;1\,[$, il existe, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, un réel $u(t)$ tel que $\varphi_f(u(t))=t$, et d'autre part ce réel est unique d'après la stricte croissance de φ_f.

> En toute rigueur, pour utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, il faudrait tout d'abord mener le raisonnement suivant : soit $t\in\,]\,0\,;1\,[$. Comme $\lim\limits_{t\to-\infty}\varphi_f(t)=0$, il existe u_0, tel que $\varphi_f(u_0)<t$. De même, $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi_f(t)=1$, et il existe u_1, tel que $\varphi_f(u_1)>t$. On peut appliquer le théorème à φ_f sur l'intervalle $[\,u_0\,;u_1\,]$.

La fonction g vérifie les mêmes hypothèses de stricte positivité et d'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ que f. Par conséquent, on peut reprendre le raisonnement précédent à l'identique, en remplaçant f par g, F par G et u par v. Ainsi,

$$\boxed{\exists!\, u(t)\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad \exists!\, v(t)\in\mathbb{R} \qquad \varphi_f(u(t))=t \quad \text{et} \quad \varphi_g(v(t))=t}$$

4 D'après ce qui a été démontré à la question précédente, $\varphi_f(\mathbb{R})=\,]\,0\,;1\,[$. Comme la fonction φ_f est de classe $\mathscr{C}^1$ et sa dérivée est strictement positive, φ_f réalise un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ vers $]\,0\,;1\,[$. Ainsi u, fonction réciproque de φ_f, est également de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifie de plus

$$\boxed{u'(t)=\frac{1}{\varphi_f'\circ u(t)}=\frac{\mathrm{F}}{f\circ u(t)} \qquad \text{et de même} \qquad v'(t)=\frac{\mathrm{G}}{g\circ v(t)}}$$

5 D'après la question 3,

$$\lim_{t\to0}u(t)=\lim_{t\to0}v(t)=-\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to1}u(t)=\lim_{t\to1}v(t)=+\infty.$$

Comme $\lambda\in\,]\,0\,;1\,[$, il en va de même pour w. De plus w est somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;1\,[$, elle est par conséquent de classe $\mathscr{C}^1$ sur ce même intervalle et y est en particulier continue. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\boxed{w(]\,0\,;1\,[)=\mathbb{R}}$$

> Même remarque qu'à la question 3 concernant l'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires.