CCP Maths 1 PSI 2011 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Baptiste Morisse (ENS Cachan) ; il a été relu par Pierre-Elliot Bécue (ENS Cachan) et Gilbert Monna (professeur en CPGE).

Le sujet est constitué de deux parties indépendantes, l'une portant sur la convergence et le calcul de la somme de deux séries trigonométriques, l'autre sur le calcul de la limite d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

- La première partie concerne l'étude de la série $\sum (1/k)\cos(k\alpha)$, pour α dans l'intervalle $[\,\pi\,;2\pi\,[$. L'objectif est de démontrer la convergence de cette série et d'en calculer la somme. On commence par étudier une fonction L, définie par une série entière, dont la valeur en 1 intervient dans le calcul de la somme. Ensuite, on étudie le cas particulier $\alpha = 2\pi/3$, à l'aide d'une méthode spécifique. Enfin, en utilisant la somme partielle $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}kt}$ on montre pas à pas la convergence de la série, dont on calcule la somme à l'aide du premier point.

  Cette partie ne présente pas de difficulté majeure. En suivant les indications de l'énoncé, et en connaissant bien son cours sur les séries, on peut la traiter rapidement. Le seul point délicat est l'étude de la continuité de L en une extrémité du domaine de convergence.

- La deuxième partie se penche sur la limite lorsque x tend vers $+\infty$ d'une intégrale à paramètre du type
$$\widetilde{f}_g(x) = \int_0^{+\infty} f(t)g(xt)\,\mathrm{d}t$$
  avec f intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On considère dans un premier temps l'existence de $\widetilde{f}_g(x)$ pour g bornée. Ensuite, on calcule la limite de $\widetilde{f}_g(x)$ pour $g(t) = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t}$. Puis, dans toute la suite du problème, on se concentre sur le cas $g(t) = |\sin(t)|$. On explicite alors $\widetilde{f}_g = \widetilde{f}$ pour la fonction $f(t) = \mathrm{e}^{\,-t}$, et on calcule sa limite en $+\infty$. Après deux lemmes intermédiaires, on calcule la limite de $\widetilde{f}(x)$ dans le cas où f est $\mathscr{C}^1$, puis dans le cas général.

  Cette deuxième partie est beaucoup plus longue, et comporte des questions sensiblement plus difficiles que la précédente car moins guidées, en particulier la dernière question du sujet.

Globalement, les questions s'enchaînent bien et les indications de l'énoncé permettent de répondre sans obstacle majeur. En revanche, deux questions très longues demandent du recul, et peuvent bloquer même les candidats les mieux préparés.

Indications

Partie I

I.1.1 Penser à une série de Taylor.

I.1.2 Montrer que la série qui définit L est uniformément convergente sur $[\,0\,;1\,]$.

I.2.2 Utiliser une somme de Riemann.

I.2.3 Poser $b_k = 1/k \cos(2k\pi/3)$ et calculer b_{3p}, b_{3p+1} et b_{3p+2}.

I.3.6 Utiliser $\cos(k\alpha) = \mathrm{Re}\ \mathrm{e}^{\,ik\alpha}$ et $\sin(k\alpha) = \mathrm{Im}\ \mathrm{e}^{\,ik\alpha}$. Puis calculer $\displaystyle\int_\pi^\alpha \frac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)}\,\mathrm{d}t$.

Partie II

II.2.3 Fixer d'abord ε, puis A, et découper l'intégrale en deux pour utiliser les deux questions précédentes.

II.3.1 Faire deux intégrations par parties successives.

II.3.3 Appliquer le changement de variable $u = x + k\pi$.

II.3.4 Montrer que $\mathrm{e}^{\,-\pi/x} < 1$ pour $x > 0$.

II.4.1 Après avoir noté que $|\sin|$ est π-périodique et paire, la décomposer en série de Fourier.

II.4.2 Attention : par « les résultats obtenus en II.2 » il faut comprendre « le schéma de la démonstration de la question II.2 » en remplaçant la fonction $\mathrm{e}^{\,it}$ par h. Montrer ainsi que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)h(xt)\,\mathrm{d}t = 0$$

II.4.3.2 Dans le premier point, utiliser la linéarité de l'intégrale pour se ramener au cas où f est constante. Montrer alors que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_\mathrm{J} f(t)\,|\sin(xt)|\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_\mathrm{J} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour le deuxième point, penser à l'approximation des fonctions continues par morceaux par les fonctions en escaliers, pour utiliser le premier point. En se ramenant à la définition « epsilonnesque » de la limite, montrer à nouveau que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_\mathrm{J} f(t)\,|\sin(xt)|\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_\mathrm{J} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Enfin, pour le dernier point, utiliser la question II.2.1 pour se ramener à un segment $[\,0\,;\mathrm{A}\,]$ et ainsi utiliser le point précédent.

Les conseils du jury

Dans le rapport de l'épreuve, le jury note que « l'épreuve couvrait une large part du programme » et qu'il donnait ainsi l'occasion de connaître « le niveau d'assimilation de nombreuses notions d'analyse ». En particulier, il s'étonne fortement « d'énormes faiblesses lors de l'utilisation des inégalités et des nombres complexes : environ un quart des candidats considèrent une relation d'ordre sur $\mathbb{C}$! ! » Enfin, rappelons qu'une présentation soignée est très appréciée des correcteurs, notant que « la plupart des candidats [ont] fait un effort pour rendre leur copie agréable à lire ».

I. Une étude de séries

I.1. Étude de la fonction L

I.1.1 Utilisons la règle de d'Alembert pour calculer le rayon de convergence de cette série. Soit $x \neq 0$. Comme

$$\forall k \geqslant 1 \qquad \left|\frac{(-1)^k x^{k+1} k}{(-1)^{k-1} x^k (k+1)}\right| = \frac{k}{k+1}\,|x| \xrightarrow[k\to\infty]{} |x|$$

on conclut que la série est convergente pour $|x| < 1$ et divergente pour $|x| > 1$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière est 1.}}$$

La fonction L est donc définie au moins sur l'intervalle ouvert $]-1\,;1\,[$. Elle est aussi définie en 1, car la série de terme général $(-1)^k/k$ est convergente : c'est une série alternée dont la valeur absolue du terme général, ici $1/k$, décroît et tend vers 0. Par suite,

$$\boxed{\text{La fonction L est définie sur }]-1\,;1\,].}$$

Cette série est connue : c'est le développement en série entière de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $]-1\,;1\,[$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in\,]-1\,;1\,[\qquad \mathrm{L}(x) = \ln(1+x)}$$

> Si on a oublié le développement en série entière de ln, on peut le retrouver à partir du développement
>
> $$\forall x \in\,]-1\,;1\,[\qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$
>
> qui est très facile à retenir : c'est la somme géométrique de raison x. L'autre développement à connaître est celui de l'exponentielle :
>
> $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^{\,x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$
>
> À l'aide de ces deux développements, on peut retrouver quasiment tous les autres développements en série entière, par dérivation, intégration ou autre.

I.1.2 Pour montrer la continuité de L sur $[\,0\,;1\,]$, utilisons le fait que la série de terme général $(-1)^{k-1}x^k/k$ est alternée et que le module du terme général décroît et tend vers 0 pour $x \in [\,0\,;1\,]$. On peut alors utiliser la majoration classique du module du reste d'ordre n par son premier terme :

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \quad \forall n \geqslant 1 \qquad \left|\mathrm{L}(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

c'est-à-dire
$$\mathop{\mathrm{Sup}}_{x\in[\,0\,;1\,]} \left|\mathrm{L}(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

et donc
$$\lim_{n\to+\infty}\ \operatorname{Sup}_{x\in[\,0\,;1\,]}\left|\mathrm{L}(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right| = 0$$

ce qui démontre la convergence uniforme de la série entière sur $[\,0\,;1\,]$, et ainsi

$$\boxed{\text{La fonction L est continue sur } [\,0\,;1\,].}$$

Comme L coïncide avec la fonction $\ln(1+x)$ sur $[\,0\,;1\,[$, par continuité à gauche en 1,

$$\boxed{\mathrm{L}(1)=\ln(1+1)=\ln(2)}$$

Il faut bien noter qu'une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R}>0$ est continue sur l'intervalle ouvert $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$, mais on ne sait rien a priori sur la continuité de la série entière au bord de cet intervalle. Il faut alors faire une étude plus précise en un point du bord. Le rapport du jury note que les candidats « ont rarement su montrer la convergence uniforme de la série de fonctions sur $[\,0\,;1\,]$ » et qu'ils se sont contentés d'établir « la convergence uniforme de la série sur tout segment de $[\,0\,;1\,[$ », ce qui ne justifie aucunement la continuité de L en 1.

I.2 Étude de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k}\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$

I.2.1 Pour tout p entier non nul

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3p} a_k &= \sum_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}-\frac{2}{3k}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}+\frac{1}{3k}-\frac{1}{k}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{3p}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{3p} a_k = \sum_{k=p+1}^{3p}\frac{1}{k}}$$

En translatant l'indice k de p, c'est-à-dire en remplaçant k par $p+h$ et en sommant de $h=1$ à $2p$ on obtient

$$\sum_{k=1}^{3p} a_k = \sum_{h=1}^{2p}\frac{1}{p+h}$$

et ensuite en factorisant par p au dénominateur, on obtient la deuxième égalité

$$\boxed{\sum_{k=1}^{3p} a_k = \frac{1}{p}\sum_{h=1}^{2p}\frac{1}{1+h/p}}$$

I.2.2 Notons f la fonction définie par $f(t)=\dfrac{1}{1+t}$ sur l'intervalle $[\,0\,;2\,]$. Alors,

$$\sum_{k=1}^{3p} a_k = \frac{1}{p}\sum_{h=1}^{2p}\frac{1}{1+h/p} = \frac{2-0}{2p}\sum_{h=1}^{2p} f\left(0+h\frac{2-0}{2p}\right)$$