X Maths B MP 2011 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sophie Rainero (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Jules Svartz (ENS Cachan) et Tristan Poullaouec (Professeur agrégé).

Ce sujet porte sur des méthodes d'accélération de la convergence de séries numériques et aborde en particulier la transformation d'Euler. Il comporte quatre parties.

- Dans la première partie, on étudie des suites complètement monotones, c'est-à-dire des suites réelles u telles que $(-1)^p\,(\Delta^p u)_n > 0$ pour tous entiers naturels n et p, où Δ désigne l'opérateur qui, à une suite u, associe la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$. C'est dans cette partie qu'est définie la série alternée qui est étudiée tout au long du problème. On montre qu'elle converge et que sa somme S est également celle d'une autre série, à la convergence plus rapide. Ce résultat est appliqué en particulier à la série harmonique alternée.
- La deuxième partie aborde la transformation d'Euler d'une série convergente de la forme $\sum(-1)^k\,u_k$, où u est une suite réelle : il s'agit d'écrire sa somme comme celle d'une autre série, faisant appel à l'opérateur Δ défini dans la première partie.
- Dans la partie III, on utilise une famille de polynômes proche de la famille des polynômes de Tchebychev afin de construire une suite de limite S, qui converge plus rapidement vers S que les sommes partielles des séries étudiées précédemment.
- Enfin, dans la quatrième partie, qui ne comporte qu'une question, on compare précisément les différentes vitesses de convergence vers S, dans le cadre de la série harmonique alternée, pour laquelle $\mathrm{S} = \ln 2$, et on donne des équivalents des restes.

Ce problème est intéressant et progressif ; il peut dans sa majeure partie être traité dès que le chapitre sur les séries numériques a été étudié en classe. De nombreuses questions, en particulier dans la partie III, peuvent même être abordées dès la première année de classe préparatoire. Signalons que cette épreuve est proche de celle donnée en 2007 à ce même concours aux étudiants de la filière PSI.

Indications

Partie I

1.a Faire une récurrence sur p en utilisant l'indication de l'énoncé dans l'hérédité.

1.b Appliquer le résultat de la question précédente à une fonction bien choisie.

2.a Procéder par récurrence sur p.

2.b Appliquer le résultat de la question précédente à la suite étudiée.

3.a Pour démontrer la convergence, on peut appliquer le critère des séries alternées.

3.b Se servir de la formule établie à la question 2.a.

3.c Démontrer la convergence normale de la série de fonctions pour intervertir le symbole de sommation avec l'intégrale sur un segment.

3.d Utiliser la formule établie à la question 3.b pour $n = 0$.

4 Appliquer ce qui précède avec une bonne fonction ω.

5.b Majorer $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^p \omega(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide de S en se servant de la croissance de l'intégrale.

Partie II

6.b S'inspirer de la démonstration du théorème de Cesàro en observant que les coefficients binomiaux dépendent de p : ce n'est pas sa généralisation habituelle.

7.a Reconnaître une série télescopique et utiliser le résultat de la question 6.b.

7.b Calculer les sommes partielles de la série en faisant apparaître une somme télescopique, puis appliquer le résultat de la question 6.a.

8.a Utiliser le résultat de la question 7.b pour calculer $\mathrm{E}_n - \mathrm{S}$, puis la formule de la question 2.a afin de faire apparaître la somme de séries du membre de droite.

Partie III

12.a Se souvenir des démonstrations de l'existence et de l'unicité de la famille des polynômes de Tchebychev et s'en inspirer.

12.b Selon la méthode utilisée dans la question précédente, utiliser les résultats du cours sur les suites récurrentes linéaires doubles ou bien faire un calcul direct.

Partie IV

13 Écrire $\mathrm{S}-\mathrm{S}_n$ sous forme intégrale et déterminer un équivalent de cette intégrale. Pour $\mathrm{S}-\mathrm{E}_n$, effectuer une transformation d'Abel. Enfin, écrire $\mathrm{S}-\mathrm{T}_n$ comme la différence de deux intégrales à l'aide d'un changement de variable et d'une formule de trigonométrie, puis trouver un développement asymptotique de chacune d'elles grâce à des intégrations par parties successives.

I. Suites complètement monotones

1.a Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Notons $\mathscr{P}(p)$ l'assertion : « Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, la suite u de terme général $u_n = f(n)$ vérifie

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, x \in \left]\, n\,; n+p \,\right[\qquad (\Delta^p u)_n = f^{(p)}(x). \text{ »}$$

- $\mathscr{P}(1)$. Soient $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et u la suite de terme général $u_n = f(n)$. Soit n un entier naturel fixé. On a

  $$(\Delta^1 u)_n = (\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n)$$

  Comme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$,
  - elle est continue sur $[\, n\,; n+1\,]$,
  - elle est dérivable sur $]\, n\,; n+1\,[$.

  Le théorème des accroissements finis donne alors l'existence d'un réel x dans $]\, n\,; n+1\,[$ tel que $f(n+1) - f(n) = f'(x)\,(n+1-n)$, c'est-à-dire tel que

  $$(\Delta^1 u)_n = f'(x)$$

  L'assertion $\mathscr{P}(1)$ est donc vérifiée.

- $\mathscr{P}(p) \Longrightarrow \mathscr{P}(p+1)$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons que l'assertion $\mathscr{P}(p)$ est vérifiée. Soient $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = f(n)$. Soit n un entier naturel fixé. Par définition de Δ^{p+1},

  $$(\Delta^{p+1} u)_n = \Big(\Delta^p(\Delta u)\Big)_n$$

  Posons, suivant l'indication de l'énoncé,

  $$g\colon \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ \;x \;\longmapsto f(x+1) - f(x) \end{cases}$$

  puis $\qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad v_k = g(k) = f(k+1) - f(k) = u_{k+1} - u_k = (\Delta u)_k$

  Ainsi, $$(\Delta^{p+1} u)_n = (\Delta^p v)_n$$

  La fonction g étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ comme f, on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe un réel x dans l'intervalle $]\, n\,; n+p\,[$ tel que

  $$(\Delta^p v)_n = g^{(p)}(x) = f^{(p)}(x+1) - f^{(p)}(x)$$

  La fonction $f^{(p)}$ vérifie les hypothèses de l'égalité des accroissements finis sur $[\, x\,; x+1\,]$ puisque f est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Il existe alors un réel y dans $]\, x\,; x+1\,[$ tel que

  $$f^{(p)}(x+1) - f^{(p)}(x) = f^{(p+1)}(y)\,(x+1-x)$$

  c'est-à-dire $$(\Delta^{p+1} u)_n = f^{(p+1)}(y)$$

  Or, $x \in \left]\, n\,; n+p\,\right[$ donc $]\, x\,; x+1\,[\,\subset\,]\, n\,; n+p+1\,[$ et ainsi y est strictement compris entre n et $n+(p+1)$. L'assertion $\mathscr{P}(p+1)$ est alors prouvée.

- Conclusion. D'après le théorème de récurrence, l'assertion $\mathscr{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire que, pour toute application f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, si u désigne la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x \in \,]\,n\,;n+p\,[\qquad (\Delta^p u)_n = f^{(p)}(x)}$$

1.b Définissons dans cette question la fonction

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{x+1} \end{cases}$$

Cette application f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et la suite a définie dans l'énoncé est la suite de terme général $a_n = f(n)$. Appliquons alors le résultat de la question 1.a. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe $x \in \,]\,n\,;n+p\,[$ tel que $(\Delta^p a)_n = f^{(p)}(x)$. Alors,

$$(-1)^p\,(\Delta^p a)_n = (-1)^p\,\frac{(-1)^p\,p!}{(1+x)^{p+1}} = \frac{p!}{(1+x)^{p+1}} > 0$$

De plus, $$(-1)^0\,(\Delta^0 a)_n = a_n = \frac{1}{1+n} > 0$$

En conclusion, $\boxed{\text{La suite } a \text{ est complètement monotone.}}$

2.a Soit u un élément de E. Démontrons par récurrence que l'assertion

$$\mathscr{Q}(p) \qquad \text{« } \forall n \in \mathbb{N} \qquad (\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k}\, u_{n+k} \text{ »}$$

est vraie pour tout entier naturel non nul p.

- $\mathscr{Q}(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, $(\Delta^1 u)_n = u_{n+1} - u_n$. En outre,

$$\sum_{k=0}^{1} (-1)^{1-k} \binom{1}{k}\, u_{n+k} = (-1)^1 \binom{1}{0}\, u_n + (-1)^0 \binom{1}{1}\, u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$$

  L'assertion $\mathscr{Q}(1)$ est donc vraie.

- $\mathscr{Q}(p) \Longrightarrow \mathscr{Q}(p+1)$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\mathscr{Q}(p)$ est vraie. Fixons un entier naturel n et calculons $(\Delta^{p+1} u)_n$. Tout d'abord

$$(\Delta^{p+1} u)_n = (\Delta \circ \Delta^p u)_n = (\Delta^p u)_{n+1} - (\Delta^p u)_n$$

  D'après l'hypothèse de récurrence $\mathscr{Q}(p)$ pour les entiers n et $n+1$, on en déduit

$$(\Delta^{p+1} u)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k}\, u_{n+k+1} - \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k}\, u_{n+k}$$