CCP Maths 1 MP 2011 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Pierre-Elliott Bécue (ENS Cachan) ; il a été relu par Julien Reygner (École Polytechnique) et Gilbert Monna (Professeur en CPGE).

Ce sujet est composé de deux exercices et d'un problème. Le premier exercice porte sur une analyse de la série $\sum 2x^n/(n^2-1)$; on cherche à déterminer son rayon de convergence, une expression de sa somme à l'aide de fonctions usuelles et à étudier la limite de cette somme en 1. Ce dernier point peut d'ailleurs mener à un développement très intéressant sur les séries entières et la convergence de leur somme aux bornes de l'intervalle ouvert de convergence.

Le second exercice porte sur l'étude des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}_+$, de l'équation différentielle $2xy' - 3y = \sqrt{x}$. Il met en œuvre les techniques classiques du cours de première année.

Le problème traite quant à lui de la transformée de Laplace, d'utilisation courante en cours de sciences industrielles, mais dont la théorie et la compréhension sont souvent limitées car elle n'est pas étudiée d'un point de vue mathématique. Le problème se découpe ainsi :

- La première partie vise à étudier quelques propriétés basiques de la transformée de Laplace, l'appliquer sur des exemples simples, puis enfin montrer que l'image par cette transformée d'une fonction continue vérifiant une certaine propriété d'intégrabilité est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Ce résultat est très puissant au vu des hypothèses faites au départ sur la fonction f. Cette partie nécessite donc une maîtrise correcte du cours d'intégration sur des domaines non bornés.
- La seconde partie porte sur le comportement asymptotique d'une fonction image par la transformée de Laplace. Les théorèmes de la valeur initiale et finale vus en classe de sciences industrielles prendront ici leur signification mathématique. Un dernier point est la prolongation des fonctions images en 0. Ici, les connaissances exigées sont sensiblement identiques à celles demandées en première partie.
- La dernière partie est une application à la fonction $t \mapsto \sin(t)/t$, qui n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ mais dont l'intégrale est convergente, et on cherche la somme de cette dernière. Cette partie exige surtout de la patience, une bonne maîtrise des étapes dans les calculs, et un certain sens du détail.

Le sujet est d'une longueur raisonnable. Une bonne assimilation du cours permettait d'en traiter une bonne partie dans le temps imparti, c'est-à-dire quatre heures.

Indications

Exercice 1

1 Utiliser une règle de Riemann ou une règle de d'Alembert.

2 Décomposer en éléments simples et faire apparaître des sommes bien connues.

3 Montrer que la série est normalement convergente.

Exercice 2

1 La solution particulière se trouve facilement à l'aide de la méthode de variation de la constante.

2 Les solutions obtenues doivent être suffisamment régulières.

Problème

1.b S'intéresser à $(-1)^{(n+1)}/(n+1)$ sur $[\,n\,;n+1\,[$.

2.a Ne pas oublier de vérifier que E est non vide.

2.b Penser à montrer que $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.

3.a La fonction $\mathcal{U}$ étant constante égale à 1, il s'agit d'intégrer une exponentielle...

3.b Vérifier que la fonction h_λ appartient à E.

4 Une fois l'existence de A prouvée, découper $\displaystyle\int_0^b g_n(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ où $b > \mathrm{A}$.

5 Intégrer par parties sur un segment, puis passer à la limite.

6.a Utiliser le théorème de dérivation sous l'intégrale.

6.b Pour rappel, il n'y a pas de théorème pour le cas $\mathscr{C}^n$ si $n > 1$, une récurrence s'impose donc.

7.a Le théorème de convergence dominée permet d'obtenir le résultat... Mais il y a plus simple !

7.b On peut partir du résultat de la question 5.

8.b Effectuer un changement de variable.

9.a Pour dériver proprement il faut couper l'intégrale en deux à l'aide de la relation de Chasles, le résultat à démontrer découle d'une intégration par parties.

9.b Utiliser le résultat précédent et majorer finement $x\displaystyle\int_0^{+\infty} |\mathrm{R}(t)|\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ en coupant en A.

9.c Il faut le déduire de ce qui précède, quitte à revenir à la définition formelle de la limite.

10.a Couper l'intégrale fournie par $\mathrm{F}(x)$ en écrivant $\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(1) + \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(1)$ et intégrer par parties la seconde intégrale, puis conclure.

10.b On peut par exemple minorer chaque u_n par un réel de la forme $\lambda/(n+1)$ et en déduire le résultat.

10.c Question de calcul, intégrer deux fois par parties, en prenant garde aux signes.

10.d Écrire $\mathcal{L}(f)(x)$ en fonction d'une intégrale de $\mathcal{L}(f)'(x)$ et d'une constante, puis travailler sur cette intégrale.

Exercice 1

1 Déterminons les réels x tels que la série $\sum 2x^n/(n^2-1)$ converge absolument. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, notons

$$u_n(x) = \left|\frac{2\,x^n}{n^2-1}\right| = \frac{2\,|x|^n}{n^2-1}$$

Si $|x| \leqslant 1$, $$0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{2}{n^2-1} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Or la série $\sum 1/n^2$ converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum u_n(x)$ converge absolument pour $|x| \leqslant 1$ d'où $\mathrm{R} \geqslant 1$.

> De façon équivalente, il est possible d'utiliser la règle de Riemann : une série $\sum u_n$ converge absolument s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha > 1$ tels que $n^\alpha |u_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} k$ (la condition est seulement suffisante !).

Si $|x| > 1$, $$u_n(x) \geqslant 2\,\frac{|x|^n}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

car $n^2 = \mathrm{o}(|x|^n)$ (croissances comparées). Par conséquent, la série $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement pour $|x| > 1$ donc $\mathrm{R} \leqslant 1$. Finalement,

$$\boxed{\mathrm{R} = 1}$$

> Une autre méthode consiste à utiliser la règle de d'Alembert pour les séries numériques *à termes positifs* (celle pour les séries entières ne figurant pas explicitement au programme). Avec la notation du corrigé, la suite $(u_{n+1}(x)/u_n(x))_{n\geqslant 2}$ est bien définie pour $x \neq 0$ (hypothèse souvent oubliée) et converge :
>
> $$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \left|\frac{\dfrac{2x^{n+1}}{(n+1)^2-1}}{\dfrac{2x^n}{n^2-1}}\right| = |x|\frac{n^2-1}{(n+1)^2-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|$$
>
> Par conséquent, la série $\sum u_n(x)$ converge si cette limite $|x|$ vérifie $0 < |x| < 1$ et diverge (grossièrement) si $|x| > 1$. Comme la convergence d'une série entière est immédiate pour $x = 0$, on conclut à nouveau que $\mathrm{R} = 1$.

2 Soit $x \in \,]-1\,;1\,[$. Remarquons d'abord que le terme général de la série étudiée se décompose en éléments simples :

$$\forall\, \mathrm{N} \geqslant 2 \qquad \frac{2\,x^n}{n^2-1} = x^n\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Rappelons que la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ est développable en série entière sur $]-1\,;1\,[$:

$$\forall\, x \in \,]-1\,;1\,[\qquad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Calculons la somme partielle de rang N de la série pour $\mathrm{N} \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \frac{2x^n}{n^2-1} &= \sum_{n=2}^{\mathrm{N}} x^n\,\frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^{\mathrm{N}} x^n\,\frac{1}{n+1}\\ &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=3}^{\mathrm{N}+1} \frac{x^{n-1}}{n}\end{aligned}$$

Supposons x non nul (pour $x = 0$, $\mathrm{S}(0) = 0$). Alors,

$$\sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \frac{2x^n}{n^2-1} = x\sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x}\sum_{n=3}^{\mathrm{N}+1} \frac{x^n}{n} = x\sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}+1} \frac{x^n}{n} + 1 + \frac{x}{2}$$

Finalement, lorsque $\mathrm{N} \to \infty$, il vient

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\,x^n}{n^2-1} = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + 1 + \frac{x}{2}$$

d'où $$\boxed{\forall x \in \,]-1\,;1\,[\quad \mathrm{S}(x) = \begin{cases} -x\ln(1-x) + \dfrac{1}{x}\ln(1-x) + \dfrac{x}{2} + 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$$

3 Considérons la série de fonctions $\sum 2\,x^n/(n^2-1)$, continues sur $[\,-1\,;1\,]$. Montrons la convergence normale de cette série sur $[\,-1\,;1\,]$:

$$\forall\, x \in [\,-1\,;1\,] \quad \forall n \geqslant 2 \qquad \left|\frac{2x^n}{n^2-1}\right| \leqslant \frac{2}{n^2-1}$$

Le terme majorant est équivalent à $2/n^2$, terme général d'une série convergente, en tant que série de Riemann. Ainsi, la série $\sum 2x^n/(n^2-1)$ converge normalement sur $[\,-1\,;1\,]$, donc converge uniformément. On en déduit que S est continue en 1 et

$$\lim_{x\to 1^-} \mathrm{S}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \lim_{x\to 1^-} \frac{2\,x^n}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1} = \mathrm{S}(1)$$

Comme dans la question précédente, calculons pour tout $\mathrm{N} \geqslant 2$

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \frac{2}{n^2-1} &= \sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n+1}\\ &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=3}^{\mathrm{N}+1} \frac{1}{n}\end{aligned}$$

$$\sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \frac{2}{n^2-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{\mathrm{N}} - \frac{1}{\mathrm{N}+1} \xrightarrow[\mathrm{N}\to\infty]{} \frac{3}{2}$$

Finalement, $$\boxed{\lim_{x\to 1^-} \mathrm{S}(x) = \frac{3}{2} = \mathrm{S}(1)}$$

> Un calcul de limite dans l'expression de $\mathrm{S}(x)$ obtenue à la question 2 permet également de répondre à la question mais ne permet pas de conclure que la limite vaut $\mathrm{S}(1)$. En effet,
>
> $$\mathrm{S}(x) = \frac{1-x^2}{x}\,\ln(1-x) + \frac{x}{2} + 1$$
>
> et $$\frac{1-x^2}{x}\,\ln(1-x) \underset{x\to 1^-}{\sim} 2\,(1-x)\,\ln(1-x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$$
>
> par croissances comparées d'où $\lim\limits_{x\to 1^-} \mathrm{S}(x) = \dfrac{3}{2}$.