X Informatique MP 2011 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Benjamin Monmege (ENS Cachan) ; il a été relu par Vincent Puyhaubert (Professeur en CPGE) et Guillaume Batog (ENS Cachan).

Ce sujet aborde le problème de la transmission d'information dans les arbres, selon le modèle dit « du téléphone ». On considère ainsi un arbre comme un réseau de communication, dans lequel les nœuds sont les acteurs du réseau et les arêtes sont les canaux par lesquels peuvent transiter les messages. Dans un tel réseau, au moins deux types de protocoles de communication peuvent être intéressants. Dans le premier, un des acteurs possède un message qu'il souhaite transmettre à tous les autres : c'est le problème de la *diffusion*. Dans le second, chaque acteur possède un message, et l'objectif consiste à transmettre l'ensemble des messages à tous les acteurs du réseau : c'est le problème de l'*échange total*.

Il est souvent plus naturel de considérer des graphes généraux pour modéliser de tels réseaux de communication. Cependant, en se limitant au cas des arbres, ce sujet étudie déjà un grand nombre de difficultés du domaine. Le sujet est divisé en quatre parties dont les deux premières sont indépendantes.

- La première partie introduit une classe d'arbres particuliers, les arbres binomiaux, qui seront utilisés dans la suite pour donner des exemples des protocoles de communication.
- La deuxième partie, majoritairement algorithmique, introduit quelques fonctions élémentaires sur les arbres, tels que la profondeur ou le diamètre.
- La troisième partie résout le problème de la diffusion dans les arbres, en commençant par la diffusion dans les arbres binomiaux. On cherche ensuite la durée optimale d'un protocole de diffusion. Des bornes inférieures et supérieures sont données, ainsi que des exemples de classes d'arbres qui atteignent ces bornes.
- La quatrième partie résout le problème d'échange total dans les arbres, en commençant à nouveau par l'échange total dans les arbres binomiaux. Dans la suite, le sujet propose de minimiser la durée d'un protocole d'échange total, puis son trafic (nombre total de messages échangés).

Il s'agit d'un sujet long, comportant à la fois des questions théoriques de niveau avancé et des questions algorithmiques demandant beaucoup de vigilance et de clairvoyance. Il est nécessaire de bien maîtriser la partie du programme sur les arbres pour aborder le plus sereinement possible ce sujet. Du point de vue de la programmation, ce sujet permet de réviser les fonctions récursives et doublement récursives.

Indications

Partie I

2 Le nombre de nœuds d'un arbre de la forme $(r, \mathcal{L})$ vaut la somme du nombre de nœuds des arbres de la liste $\mathcal{L}$ à laquelle on ajoute 1 pour le nœud r.

3 Dans l'arbre de la question 1, essayer de repérer deux copies de l'arbre $\mathcal{B}_3$.

4 Utiliser la fonction Caml `map`, de type `('a -> 'b) -> 'a list -> 'b list`, qui prend en argument une fonction `f` ainsi qu'une liste `[a1;...;an]` et renvoie la liste `[f a1;...;f an]`.

5 Utiliser la construction de la question 3, puis appliquer la fonction de la question 4 avec un paramètre n bien choisi.

6 La profondeur d'un arbre de la forme $(r, \mathcal{L})$, non réduit à sa racine, vaut le maximum des profondeurs des arbres de la liste $\mathcal{L}$ auquel on ajoute 1. Montrer ainsi que $\mathcal{B}_k$ possède un unique nœud à profondeur maximale. Pour construire un chemin de longueur maximale, utiliser la définition de la question 3 et concaténer des chemins des deux copies de $\mathcal{B}_{k-1}$.

7 En notant $u_{k,\ell}$ le nombre de nœuds à profondeur ℓ dans l'arbre $\mathcal{B}_k$, utiliser la caractérisation de la question 3 pour exhiber une formule de récurrence reliant les nombres $u_{k,\ell}$, $u_{k-1,\ell}$ et $u_{k-1,\ell-1}$.

8 Justifier que $\mathcal{C}_n$ est un arbre par récurrence sur n.

9 Commencer par montrer que les fils du nœud j dans $\mathcal{C}_n$ sont tous les nœuds d'indice $j + 2^k$ pour k vérifiant $j \leqslant 2^k \leqslant n - j$.

Partie II

11 Modifier légèrement la fonction de la question 10 afin qu'elle renvoie à la fois la profondeur de l'arbre et un nœud qui possède cette profondeur.

12 Pour un nœud s fixé, écrire deux fonctions mutuellement récursives qui prennent en argument un arbre ou une liste d'arbres et recherchent un chemin vers s. Par défaut, si s ne fait pas partie de l'arbre ou de la liste d'arbres donnés, on peut par exemple renvoyer le chemin vide.

13 On pourra commencer par décrire une opération de rotation d'un arbre, qui consiste à réaliser un échange de la racine avec un de ses fils. Ensuite, en s'aidant de la fonction `chemin` pour trouver le nœud auquel on veut appliquer le changement de racine, on applique une succession de rotations le long de ce chemin.

14 Montrer d'abord que la profondeur de $\mathcal{T}'$ est inférieure ou égale à D. Montrer ensuite qu'il existe un chemin partant de r_1 de longueur maximale parmi les chemins de $\mathcal{T}$.

15 Fusionner les résultats des questions précédentes de la partie II.

16 Pour la première partie de la question, utiliser la question 14. Pour la seconde partie, commencer par montrer que la profondeur de tout pivot $\mathcal{T}'$ est supérieure ou égale à $\lceil \mathrm{D}/2 \rceil$, puis construire un arbre de profondeur $\lceil \mathrm{D}/2 \rceil$ obtenu par changement de racine, en considérant le nœud au milieu d'un chemin de longueur maximale dans $\mathcal{T}$.

Partie III

17 Trouver une relation de récurrence reliant les durées de diffusion dans les arbres $\mathcal{B}_k$. La simplifier en remarquant que la suite de ces durées est croissante.

18 Procéder de la même manière qu'à la question 17 en utilisant la construction de la question 3.

19 Combien de fils possède la racine de $\mathcal{B}_k$?

20 En supposant que l'arbre $\mathcal{T}$ est de la forme $(r, (\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_\ell))$ et qu'on dispose de diffusions optimales pour les arbres $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_\ell$, comment en déduire une diffusion optimale pour $\mathcal{T}$ à l'aide d'une approche gloutonne ?

21 Utiliser l'algorithme que vous avez décrit dans la question 20 en ne calculant que la durée de la diffusion et pas la diffusion elle-même.

22 Combien de messages peuvent être transmis dans le pire des cas à chaque étape ?

23 Montrer par récurrence sur k, qu'après k étapes, au plus 2^k nœuds possèdent le message. Utiliser l'arbre $\mathcal{C}_n$ défini dans la question 8 pour fournir un exemple d'arbre qui atteint la borne inférieure et le prouver en utilisant le résultat de la question 19.

Partie IV

24 Construire par récurrence un algorithme d'échange total dans l'arbre $\mathcal{B}_k$ tel qu'après k étapes, la racine possède les messages de tous les nœuds. Les k dernières étapes pourront utiliser l'algorithme de diffusion étudié dans la question 18.

25 Montrer que pour tout arbre la durée de tout échange total est supérieure ou égale au diamètre de l'arbre, et conclure en utilisant le résultat de la question 6.

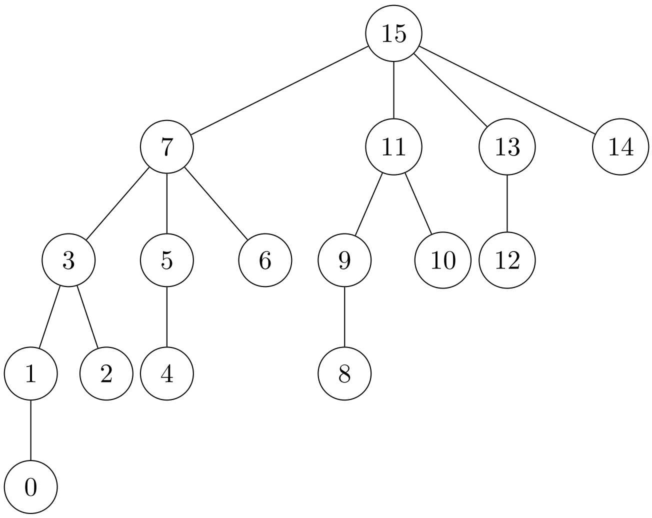
26 Montrer que le nombre total de messages transmis double au plus à chaque étape.

28 Il s'agit de procéder à un parcours de l'arbre, en commençant par exemple par le nœud externe le plus à droite de l'arbre.

29 Après avoir remarqué que tout algorithme d'échange total contient un échange entre chaque voisin de l'arbre, montrer par l'absurde qu'il n'existe pas de tel algorithme avec un trafic inférieur ou égal à $2(n-2)$. Pour cela, montrer qu'il existe deux paires de voisins qui ne s'échangent leurs messages qu'une unique fois et aboutir à une contradiction en considérant un chemin qui lie ces deux paires de voisins.

I. Arbres binomiaux

1 L'arbre dessiné ci-dessous est un arbre binomial d'ordre 4, dans lequel les nœuds ont été indexés en suivant un parcours postfixe de l'arbre.



> Le sujet n'exige pas d'expliquer la manière dont les nœuds sont étiquetés, mais un correcteur aura sans doute une meilleure appréciation de la copie si le candidat est d'ores et déjà capable de justifier une certaine cohérence dans son choix.

2 Un arbre binomial d'ordre 0 étant réduit à sa racine, il possède un unique nœud qui est externe. Montrons par récurrence forte que la propriété :

$$\mathscr{P}(k) : \quad \text{« } \mathcal{B}_k \text{ possède } 2^k \text{ nœuds, dont } 2^{k-1} \text{ nœuds externes. »}$$

est vraie pour tout $k \geqslant 1$.

- $\underline{\mathscr{P}(1)}$: un arbre binomial d'ordre 1 consiste en une racine avec un unique fils, qui est un nœud externe. Ainsi $\mathcal{B}_1$ possède 2 nœuds, dont 1 externe.
- $\underline{\mathscr{P}(k-1) \Longrightarrow \mathscr{P}(k)}$: par définition, un arbre binomial d'ordre k est de la forme $(r_k, (\mathcal{B}_{k-1}, \ldots, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_0))$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on sait que pour tout $j \in \{1, \ldots, k-1\}$, l'arbre $\mathcal{B}_j$ possède 2^j nœuds dont 2^{j-1} sont externes. Par ailleurs, on a vu précédemment que $\mathcal{B}_0$ possède un unique nœud, qui est externe. Ainsi, en comptant la racine qui est un nœud interne, $\mathcal{B}_k$ possède $1 + \sum\limits_{j=0}^{k-1} 2^j = 2^k$ nœuds dont $1 + \sum\limits_{j=1}^{k-1} 2^{j-1} = 2^{k-1}$ nœuds externes.
- <u>Conclusion</u> :

$$\boxed{\text{Pour tout } k \geqslant 0,\ \mathcal{B}_k \text{ possède } 2^k \text{ nœuds, donc } 2^{k-1} \text{ nœuds externes, sauf pour } \mathcal{B}_0 \text{ qui possède 1 nœud externe.}}$$