Mines Informatique MP 2011 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Charles-Pierre Astolfi (ENS Cachan) ; il a été relu par Benjamin Monmege (ENS Cachan) et Guillaume Batog (ENS Cachan).

Ce sujet se compose de deux parties indépendantes : un exercice sur les automates et un problème d'algorithmique avec des graphes et des permutations.

- L'exercice sur les automates contient des questions très classiques (déterminisation, lemme de l'étoile) et demande du soin pour faire des preuves propres. L'énoncé introduit différents langages dans le but de démontrer que l'intersection infinie de langages rationnels n'est pas forcément rationnelle.
- Le problème, de difficulté croissante, étudie deux algorithmes de classement des joueurs dans un tournoi. Avant d'aborder une question générale, l'énoncé propose toujours de travailler sur un exemple, ce qui permet de bien assimiler les outils introduits dans le problème. Concernant la partie algorithmique, l'accent est mis sur une programmation itérative, à base de vecteurs. On y trouve quelques questions de théorie des graphes : une familiarité avec ce domaine est un avantage certain.

C'est un sujet progressif qui permet de bien réviser les automates et d'aborder quelques questions de graphes et de combinatoire.

Indications

Exercice

2 Si $w = w_1 \dots w_n$, utiliser le non-déterminisme pour lire $w_3 \dots w_{n-2}$.

4 Donner une expression rationnelle qui décrit le langage L_n.

5 Que peut-on dire de l'union de deux langages rationnels ?

6 Que se passe-t-il si l'on intersecte l'ensemble des palindromes avec l'ensemble des mots de la forme $a^n b a^n$, avec $n \in \mathbb{N}$?

7 L'énoncé a introduit deux suites de langages rationnels, $(\mathrm{L}_n)_{n \geqslant 1}$ et $(\mathrm{L}'_n)_{n \geqslant 1}$, et un langage non rationnel, l'ensemble des palindromes...

Problème

9 Créer un vecteur tel que l'élément i contienne le score du joueur i et le remplir en parcourant la matrice du tournoi.

10 Calculer le score de chaque joueur et trier les joueurs par score décroissant.

13 Utiliser la condition nécessaire et suffisante de l'énoncé.

14 Observer que $s(\mathrm{T}_4) \geqslant 1$.

15 Remarquer que tout joueur apparaissant dans un circuit perd une partie.

16 C'est une application directe de la question 15.

17 Il existe un classement qui commence par 2 et qui vérifie les hypothèses de la question précédente.

18 Chercher tous les triangles de G_5.

19 Explorer tous les triangles possibles et s'interdire de passer deux fois par un même arc (utiliser une matrice de booléens pour savoir si un arc a déjà été visité).

20-21 Considérer la plus grande sous-permutation décroissante à droite de σ.

22 Utiliser la fonction de la question précédente. Elle renvoie un booléen dont on peut se servir comme test d'arrêt dans l'énumération des permutations.

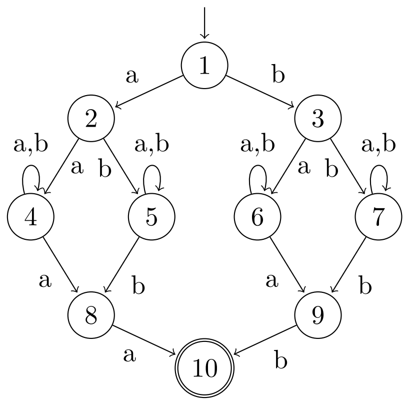
Exercice sur les automates

1 Un mot est dans L_1 si, et seulement si, il est de longueur supérieure à 2 et s'il commence et finit par la même lettre.

$$\boxed{\text{L'expression rationnelle } a\cdot(a+b)^\star\cdot a + b\cdot(a+b)^\star\cdot b \text{ décrit le langage } L_1.}$$

2 L'automate ci-contre reconnaît le langage L_2. La lecture d'un mot par l'automate se déroule en trois phases :

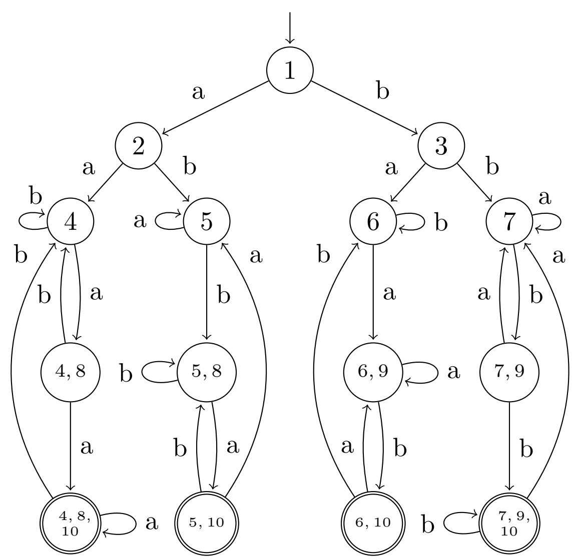
- On lit les deux premières lettres.
- On avance dans le mot jusqu'aux deux dernières. Le non-déterminisme de l'automate permet de deviner le moment où l'avant-dernière lettre du mot est rencontrée.
- On vérifie que les deux dernières lettres sont exactement les transposées des deux premières lettres.



> L'indication du sujet « les transitions de $\mathcal{A}$ seront étiquetées par des éléments de Σ » signifie que l'automate ne doit pas contenir d'ε-transition.

3 La table de transition d'un automate déterminisé pour A est donnée ci-dessous. L'état initial est $\{1\}$ et les états finaux sont $\{4,8,10\}$, $\{5,10\}$, $\{6,10\}$ et $\{7,9,10\}$.

	a	b
$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
$\{2\}$	$\{4\}$	$\{5\}$
$\{3\}$	$\{6\}$	$\{7\}$
$\{4\}$	$\{4,8\}$	$\{4\}$
$\{5\}$	$\{5\}$	$\{5,8\}$
$\{4,8\}$	$\{4,8,10\}$	$\{4\}$
$\{5,8\}$	$\{5,10\}$	$\{5,8\}$
$\{4,8,10\}$	$\{4,8,10\}$	$\{4\}$
$\{5,10\}$	$\{5\}$	$\{5,8\}$
$\{6\}$	$\{6,9\}$	$\{6\}$
$\{7\}$	$\{7\}$	$\{7,9\}$
$\{6,9\}$	$\{6,9\}$	$\{6,10\}$
$\{7,9\}$	$\{7\}$	$\{7,9,10\}$
$\{6,10\}$	$\{6,9\}$	$\{6\}$
$\{7,9,10\}$	$\{7\}$	$\{7,9,10\}$



> Lorsqu'il est demandé de construire un automate, il est parfois plus simple de donner l'ensemble de ses états initiaux, finaux et sa table de transition, plutôt que de le dessiner.
>
> Déterminiser un automate est une question classique qu'il faut savoir faire les yeux fermés.

4 Notons Σ^n l'ensemble des mots de n lettres sur Σ. Le langage L_n est décrit par l'expression rationnelle $\sum\limits_{w\in\Sigma^n} w\cdot(a+b)^\star\cdot\overline{w}$, ce qui montre que

$$\boxed{\mathrm{L}_n \text{ est rationnel.}}$$

> Il est possible de généraliser l'automate de la question 2 en un automate $\mathcal{A}=\langle\Sigma,\mathrm{Q},\mathrm{I},\mathrm{F},\delta\rangle$ dont les états sont de la forme (w,k) où $|w|\leqslant n$ et $k\in\{p,s\}$ (pour préfixe et suffixe). Cet automate possède un unique état initial (ε,p) et un unique état final (ε,s). Ses transitions sont, pour tout $x\in\Sigma$:
>
> $$\begin{array}{cccl} (w,p) & \xrightarrow{x} & (wx,p) & \text{si } |w|<n \\ (wx,p) & \xrightarrow{x} & (w,s) & \text{si } |w|=n \\ (wx,s) & \xrightarrow{x} & (w,s) & \text{si } |w|<n-1 \\ (w,p) & \xrightarrow{x} & (w,p) & \text{si } |w|=n \end{array}$$
>
> Enfin, une dernière façon de procéder consiste à établir une relation de récurrence sur les langages $(\mathrm{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
>
> $$\left|\begin{array}{l} \mathrm{L}_1 \text{ est rationnel} \\ \mathrm{L}_{n+1}=a\mathrm{L}_n a\cup b\mathrm{L}_n b \end{array}\right.$$
>
> Puisque L_1 est rationnel et que L_{n+1} s'exprime en fonction de L_n et des opérations d'union et de concaténation, une récurrence sur n permet de montrer que L_n est rationnel pour tout $n\in\mathbb{N}$.

5 Notons $\Sigma^{<k}$ l'ensemble des mots sur Σ de longueur strictement inférieure à k. Alors $\mathrm{L}'_n=\Sigma^{<2n}\cup\mathrm{L}_n$. Or $\Sigma^{<2n}$ est un langage rationnel (c'est un ensemble fini), tout comme L_n d'après la question 4. Puisque les langages rationnels sont clos par union,

$$\boxed{\mathrm{L}'_n \text{ est un langage rationnel.}}$$

> Pour démontrer qu'un langage est rationnel, il est parfois plus simple de l'exprimer à partir de langages rationnels à l'aide des opérations d'union (finie), d'intersection (finie), de complément, de concaténation et d'étoile de Kleene.

6 Notons $\mathbb{P}$ l'ensemble des palindromes de Σ et L le langage défini par l'expression rationnelle $a^\star ba^\star$. Remarquons que $\mathbb{P}\cap\mathrm{L}=\{a^nba^n \mid n\geqslant 0\}$ et notons S ce langage.

Supposons par l'absurde que $\mathbb{P}$ est rationnel. Dans ce cas, S est l'intersection de deux langages rationnels et est donc aussi rationnel. D'après le lemme de l'étoile, il existe un entier p vérifiant l'implication suivante : pour tout $w\in\mathrm{S}$ de longueur strictement supérieure à p, il existe $x,y,z\in\Sigma^\star$ tels que :

$$\begin{cases} w=xyz \\ y\neq\varepsilon \\ \forall n\in\mathbb{N}\quad xy^nz\in\mathrm{S} \end{cases}$$

> Il existe des langages qui vérifient le lemme de l'étoile sans être rationnels.

Soit $w\in\mathrm{S}$ de longueur au moins $p+1$. Notons $w=xyz$ une décomposition de w découlant du lemme de l'étoile. Alors $w'=xz$ est un mot de S (cas $n=0$). Deux possibilités se présentent.