Centrale Physique PSI 2010 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Wahb Ettoumi (ENS Cachan) ; il a été relu par Julien Dumont (Professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Le sujet explore différents aspects pratiques de l'optique ondulatoire. Il s'intéresse à la photographie Lippmann ainsi qu'à la production d'hologrammes.

- Dans la première partie, on étudie la fabrication et le comportement d'un miroir appelé miroir de Bragg, dont la réflectivité dépend de son orientation. Le problème suit d'abord globalement le cheminement du cours sur les ondes électromagnétiques, avant de s'en éloigner et de faire appel au sens physique du candidat à travers des questions qualitatives, et délicates, sur la réalisation expérimentale d'une photographie prise avec le procédé Lippmann.
- La seconde partie survole le principe du Laser grâce à une analogie électronique, puis se consacre à l'étude des hologrammes. La sous-partie sur l'interféromètre de Michelson est calquée sur le cours, et aucune difficulté particulière n'est à signaler. Cette partie se termine par l'étude d'une diapositive qui se comporte comme une lentille multifocale.

L'énoncé comporte deux parties indépendantes, pour lesquelles peu de résultats intermédiaires sont fournis. Cependant, la réutilisation de résultats établis dans la première partie fait gagner beaucoup de temps dans la seconde. Il s'agit d'un problème très long permettant de faire la synthèse entre les ondes électromagnétiques dans le vide et l'optique ondulatoire. Certaines questions, notamment dans la première partie, plus difficile que la seconde, sont de plus relativement ambiguës et pouvaient déstabiliser les candidats. L'épreuve peut être entièrement traitée par un étudiant des filières MP et PC. Pour les élèves frustrés par l'approche un peu trop superficielle du Laser, signalons que le sujet X/ENS PSI de cette année s'intéressait aussi à ce thème, qui est d'actualité puisque l'on en célèbre les 50 ans : c'est en mai 1960 que cette technologie fut créée par l'américain Théodore Maiman.

Indications

Partie I

I.A.5 Calculer les énergies électrique et magnétique emmagasinées entre un plan nodal électrique et le plan nodal magnétique suivant. Il faut ensuite observer que la somme de ces deux termes est constante.

I.B.1.d Exprimer la superposition des ondes planes présentes dans la gélatine pour aboutir à une formule du cours.

I.B.2.b Raisonner sur les distances parcourues dans la gélatine.

I.C.4 Effectuer la somme géométrique de l'expression obtenue pour les amplitudes, et prendre le module au carré.

I.C.6 Le calcul du déphasage se fait comme pour un Michelson en lame d'air, en prenant soin de ne pas oublier l'indice de la gélatine, différent de celui de l'air, ainsi que le déphasage supplémentaire dû à la réflexion vitreuse du rayon incident.

I.E.2.b Utiliser le résultat de la question I.B.1.c.

Partie II

II.A.3.a Commencer par déterminer la tension aux bornes de la bobine.

II.A.3.e Des oscillations peuvent avoir lieu s'il existe $\omega \neq 0$ satisfaisant la fonction de transfert dans le cas où K est fermé.

II.A.3.f Repartir de la fonction de transfert puis identifier une équation différentielle à partir de la relation algébrique entre les paramètres du problème et $\mathrm{V_E}$.

II.B.2.e Calculer chaque intégrale en faisant apparaître un sinus cardinal.

II.B.3.e Développer le cosinus à l'ordre deux, puis écrire la différence de marche pour les franges brillantes en fonction de l'ordre d'interférence au centre.

II.B.3.h Calculer au premier ordre en r/f'_m la différence $\mathrm{MF'} - \mathrm{NF'}$, puis remplacer l'expression des rayons par celle de la question II.B.3.e.

De la photographie à l'holographie

I. La photographie Lippmann

I.A Ondes électromagnétiques stationnaires

I.A.1 Lorsque $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ sont des ondes planes monochromatiques de pulsation ω et de vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$, la relation liant le champ $\overrightarrow{\mathrm{E}_\mathrm{i}}$ au champ $\overrightarrow{\mathrm{B}_\mathrm{i}}$ s'écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{B}_\mathrm{i}} = \frac{\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{\mathrm{E}_\mathrm{i}}}{\omega}$$

Or, $$\overrightarrow{k} = k\,\overrightarrow{e_x}$$

d'où $$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{B}_\mathrm{i}}(x,t) = \frac{\mathrm{E}_0}{c}\,\cos(\omega t - kx)\,\overrightarrow{e_z}}$$

> La relation de structure pour une onde plane $\overrightarrow{\mathrm{A}} = \overrightarrow{\mathrm{A}_0}\,\exp\left[\mathrm{j}(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})\right]$ de pulsation ω et de vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ se retrouve à partir des relations
> $$\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{A}} = -\mathrm{j}\,\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{A}} = -\mathrm{j}\,\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{\mathrm{A}}$$
> Les dérivées temporelles vérifient de plus
> $$\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{A}}}{\partial t} = \mathrm{j}\omega\,\overrightarrow{\mathrm{A}}$$
> Dans le vide, l'équation de Maxwell-Faraday se réécrit
> $$-\mathrm{j}\,\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{\mathrm{E}} = -\mathrm{j}\omega\,\overrightarrow{\mathrm{B}}$$
> d'où $$\overrightarrow{\mathrm{B}} = \frac{\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{\mathrm{E}}}{\omega}$$

I.A.2 À l'intérieur du métal parfait, c'est-à-dire de conductivité infinie, les champs électrique et magnétique sont nuls,

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{B}} = \overrightarrow{0} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{E}} = \overrightarrow{0}}$$

De plus, la relation de passage pour le champ électrique à l'interface $x = 0$ s'écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{E}}(0^+,t) - \overrightarrow{\mathrm{E}}(0^-,t) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\overrightarrow{e_x}$$

σ désignant la charge surfacique de cette interface. Cette relation traduit la continuité de la composante tangentielle du champ et la discontinuité de sa composante normale. Or, à tout instant t, le champ électrique dans le métal vérifie

$$\overrightarrow{\mathrm{E}}(0^+,t) = \overrightarrow{0}$$

Le champ extérieur total en 0^- doit donc être nul, ce qui ne peut pas être le cas avec la seule onde incidente, le champ $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ étant purement tangentiel.

$$\boxed{\text{Il existe donc une onde réfléchie.}}$$

> Le fait d'avoir un champ électrique purement tangentiel, et donc de composante normale nulle impose l'absence de charge surfacique à l'interface, cette dernière devant assurer la continuité de la composante normale du champ.

Cherchons l'onde réfléchie sous la forme

$$\overrightarrow{\mathrm{E}_{\mathrm{r}}} = \mathrm{E}_{0\mathrm{r}} \cos(\omega t + kx)\overrightarrow{e_y}$$

Le champ électrique total dans le demi-espace $x < 0$ s'écrit alors

$$\overrightarrow{\mathrm{E}} = \overrightarrow{\mathrm{E}_{\mathrm{i}}} + \overrightarrow{\mathrm{E}_{\mathrm{r}}}$$

et la relation de passage impose donc, à tout instant t,

$$\overrightarrow{\mathrm{E}_{\mathrm{r}}}(0^-, t) = -\overrightarrow{\mathrm{E}_{\mathrm{i}}}(0^-, t)$$

On en déduit l'amplitude de l'onde réfléchie

$$\mathrm{E}_{0r} = -\mathrm{E}_0$$

En utilisant la même relation qu'à la question I.A.1, il vient

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{E}_{\mathrm{r}}} = -\mathrm{E}_0\ \cos(\omega t + kx)\overrightarrow{e_y} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{B}_{\mathrm{r}}} = \frac{\mathrm{E}_0}{c}\ \cos(\omega t + kx)\overrightarrow{e_z}}$$

$\boxed{\textbf{I.A.3}}$ Réécrivons les champs totaux dans le demi-espace $x < 0$ à l'aide des expressions obtenues à la question précédente :

$$\overrightarrow{\mathrm{E}_{\mathrm{t}}}(x, t) = \mathrm{E}_0\,[\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)]\ \overrightarrow{e_y}$$

soit
$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{E}_{\mathrm{t}}}(x, t) = 2\,\mathrm{E}_0\ \sin(\omega t)\sin(kx)\ \overrightarrow{e_y}}$$

De même pour le champ magnétique,

$$\overrightarrow{\mathrm{B}_{\mathrm{t}}}(x, t) = \frac{\mathrm{E}_0}{c}\,[\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)]\ \overrightarrow{e_z}$$

soit
$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{B}_{\mathrm{t}}}(x, t) = 2\,\frac{\mathrm{E}_0}{c}\ \cos(\omega t)\ \cos(kx)\ \overrightarrow{e_z}}$$

Ce sont des ondes stationnaires, les ventres du champ électrique coïncidant avec les nœuds du champ magnétique et réciproquement. Les annulations du champ électrique à tout instant t (les nœuds) sont distantes de π/k, soit $\lambda/2$.