X Physique 1 PC 2010 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Rémy Hervé (Professeur agrégé à l'université) ; il a été relu par Vincent Freulon (ENS Ulm) et Jean-Julien Fleck (Professeur en CPGE).

Ce sujet sur la géothermie des planètes est composé de trois parties : la genèse des planètes, leur refroidissement par conduction puis par convection. Les motivations de fond sont de discuter en parallèle le processus de chauffage du manteau terrestre et celui d'évacuation de l'énergie thermique associée vers la surface.

- La première partie est consacrée à la formation des planètes. La première sous-partie aborde le mécanisme initial de cette formation par accrétion de points matériels provenant de l'infini. Après une deuxième sous-partie très brève sur l'énergie thermique résultant de l'accrétion, une troisième sous-partie s'intéresse à la différenciation du noyau, c'est-à-dire à la séparation des éléments légers et lourds en manteau et noyau, sous l'effet combiné de la gravitation et de la poussée d'Archimède. Cette première partie constitue une entrée en matière ardue puisqu'il faut être capable de restituer ou de retrouver de nombreux résultats, en particulier de mécanique céleste, pour les utiliser immédiatement dans des raisonnements assez fins et peu guidés.
- La deuxième partie envisage en parallèle le chauffage du manteau par le noyau et l'évacuation de cette énergie vers la surface par conduction. Cette courte partie suppose cette fois de bien maîtriser le cours sur la diffusion thermique, l'équation de diffusion étant un prérequis. De plus, si la résolution de l'équation est relativement guidée, elle nécessite une certaine aisance avec les équations aux dérivées partielles.
- La troisième partie traite de l'apparition de rouleaux de convection dans le noyau. Après une première sous-partie s'intéressant à la croissance d'une instabilité convective dans un manteau chauffé par diffusion par le noyau, une deuxième envisage le même phénomène lorsque le chauffage du manteau se fait par désintégration d'éléments radioactifs. Aux compétences déjà requises dans la partie précédente s'ajoute cette fois la mécanique des fluides avec, en particulier, l'utilisation de la dérivée particulaire dans une autre équation que celle de Navier-Stokes. Il faut également savoir traiter un problème de diffusion thermique avec sources. Enfin, l'ensemble de ce travail doit pouvoir être fait dans une démarche de type perturbation.

Ce sujet est particulièrement intéressant dans les thématiques qu'il aborde, notamment la genèse des planètes par accrétion et la croissance d'une instabilité de Rayleigh-Bénard. Cela le rend riche et donc susceptible de poser des difficultés puisqu'il allie, à un niveau avancé, maîtrise des savoirs, complexité des calculs et finesse des raisonnements. Notons, par ailleurs, que la première partie, bien que difficile, est entièrement traitable avec des outils de première année. À réserver aux candidats qui veulent se mettre en difficulté.

Indications

I. Genèse des planètes telluriques

I.1.1 Utiliser la méthode de la droite d'action pour déterminer $\overrightarrow{\mathrm{L}}$ quand la masse est à l'infini.

I.1.2 Le moment cinétique et l'énergie cinétique sont conservés.

I.1.3 La vitesse de libération est la vitesse minimale que doit avoir un corps quand il quitte la surface d'une planète pour atteindre l'infini.

I.1.4 Seuls les points matériels vérifiant l'inégalité de la question précédente atteignent la planète.

I.3.1 Appliquer le théorème de Gauss au champ gravitationnel.

I.3.2 L'enthalpie standard pour produire une mole d'eau est d'environ -300 kJ.

II. Refroidissement par conduction

II.3 Pour z fini, lorsque t tend vers 0, T tend vers $\mathrm{T_c}$ et ξ tend vers l'infini.

II.5 On peut négliger la courbure de la Terre si les variations de températures ont lieu sur des distances caractéristiques petites devant le rayon terrestre.

III. Refroidissement par convection

III.1.2 Utiliser, en le justifiant, que

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dT}} \simeq \frac{\rho\,(\mathrm{T_0}+\mathrm{T_1})-\rho(\mathrm{T_0})}{(\mathrm{T_0}+\mathrm{T_1})-\mathrm{T_0}} = \frac{\rho_1}{\mathrm{T_1}}$$

III.1.4 La solution statique est instable si la fluctuation avec $k=\pi/4$ peut croître exponentiellement.

III.2.1 En présence d'une source, il faut ajouter, dans l'équation de diffusion, un terme H/C.

La chaleur des planètes

I. Genèse des planètes telluriques

I.1.1 Le point matériel arrivant de l'infini avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ on peut, sans perte de généralité, choisir un système d'axe cartésien centré sur la planète tel que

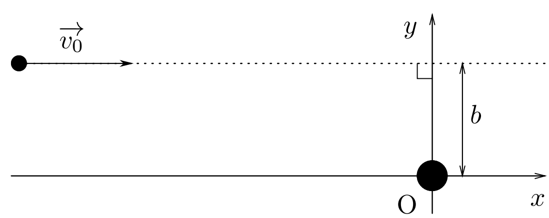
$$\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{e_x}$$

À l'infini, le point matériel se déplace donc suivant une droite parallèle à l'axe $(\mathrm{O}x)$ située à une distance y_0 de celui-ci. En terminant de fixer le système d'axe cartésien, on peut donc poser comme condition initiale que le point matériel à la vitesse $\overrightarrow{v_0}$ en un point P_0 de coordonnées $(x_0, y_0, 0)$ avec x_0 qui tend vers moins l'infini (et $y_0 \geqslant 0$). En calculant le moment cinétique du point matériel par rapport à O en P_0 puis en prenant la limite, on en déduit b :

$$\overrightarrow{\mathrm{L}}\,(\mathrm{P}_0) = m\,\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} \wedge \overrightarrow{v_0} = -m\,v_0\,y_0\,\overrightarrow{e_z}$$

d'où
$$\boxed{b = y_0}$$

b est la distance entre le point O et la direction de la vitesse initiale du point matériel.



> b est généralement appelé « paramètre d'impact ».

I.1.2 La trajectoire d'un point matériel soumis à l'attraction gravitationnelle d'un corps peut être de trois types : une ellipse, une parabole ou une hyperbole. Le point matériel provenant de l'infini, sa trajectoire n'est pas fermée, ce n'est donc pas une ellipse. Par ailleurs, une trajectoire parabolique correspond à une vitesse à l'infini nulle. Par conséquent, si l'on suppose v_0 non nul,

$$\boxed{\text{La trajectoire du point matériel est une branche d'hyperbole.}}$$

Le point matériel, que l'on note P, est soumis à la seule attraction gravitationnelle $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ de la masse M située en O,

$$\overrightarrow{\mathrm{F}} = -\mathrm{G}\,\frac{m\,\mathrm{M}}{\mathrm{OP}^3}\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

Il en résulte que son moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ en O est nul :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{F}} = \overrightarrow{0}$$

Ainsi, d'après le théorème du moment cinétique appliqué à P,

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{0} \qquad \text{soit} \qquad \overrightarrow{\mathrm{L}} = \overrightarrow{\mathrm{L}_0}$$

où $\overrightarrow{\mathrm{L}_0}$ est un vecteur constant. Or, lorsque P passe par le point de sa trajectoire le plus proche de O, la distance OP vaut r_{min} et la vitesse est orthoradiale (normale à $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$) de norme notée v_{m}, d'où

$$\|\overrightarrow{\mathrm{L}}\| = m\, r_{\mathrm{min}}\, v_{\mathrm{m}}$$

soit, pour b,

$$b = r_{\mathrm{min}}\,\frac{v_{\mathrm{m}}}{v_0}$$

Il reste à déterminer v_{m}. Pour cela, appliquons le théorème de l'énergie cinétique au point P. La masse m n'est soumise qu'à l'attraction gravitationnelle de M qui dérive de l'énergie potentielle

$$\mathrm{E_p} = -\mathrm{G}\,\frac{m\,\mathrm{M}}{\mathrm{OP}}$$

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à P entre l'infini, où sa vitesse vaut v_0, et le point de la trajectoire le plus proche de O, où sa vitesse vaut v_{m}, donne

$$\frac{1}{2}\,m\,{v_0}^2 = \frac{1}{2}\,m\,{v_{\mathrm{m}}}^2 - \mathrm{G}\,\frac{m\,\mathrm{M}}{r_{\mathrm{min}}}$$

ce qui s'écrit aussi

$$v_{\mathrm{m}} = \sqrt{{v_0}^2 + 2\,\mathrm{G}\,\frac{\mathrm{M}}{r_{\mathrm{min}}}}$$

On en déduit

$$\boxed{b = r_{\mathrm{min}}\sqrt{1 + 2\,\mathrm{G}\,\frac{\mathrm{M}}{r_{\mathrm{min}}\,{v_0}^2}}}$$

I.1.3 La vitesse de libération est la vitesse minimale que doit avoir une masse m lorsqu'elle quitte la surface d'une planète pour atteindre l'infini. Dans le cas limite où la vitesse initiale de la masse est v_ℓ, elle atteint l'infini avec une vitesse nulle. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre la surface de la planète, où $\mathrm{OP} = \mathrm{R}$ et $v = v_\ell$, et l'infini, où $\mathrm{E_p} = 0$ et $v = 0$, donne

$$\frac{1}{2}\,m\,{v_\ell}^2 - \mathrm{G}\,\frac{m\,\mathrm{M}}{\mathrm{R}} = 0$$

d'où

$$\boxed{v_\ell = \sqrt{\frac{2\,\mathrm{G}\,\mathrm{M}}{\mathrm{R}}}}$$

La masse heurte la planète si la distance minimale d'approche r_{min} est plus petite que le rayon de la planète. Or, d'après la question précédente

$$b^2 = r_{\mathrm{min}}^{\,2} + 2\,\mathrm{G}\,\frac{\mathrm{M}}{{v_0}^2}\,r_{\mathrm{min}}$$

ce qui implique que b^2 est une fonction strictement croissante de r_{min}. De ce fait, l'inégalité $r_{\mathrm{min}} < \mathrm{R}$ est équivalente à l'inégalité

$$b^2 < \mathrm{R}^2 + 2\,\mathrm{G}\,\frac{\mathrm{M}}{{v_0}^2}\,\mathrm{R} = \mathrm{R}^2\left(1 + 2\,\frac{\mathrm{G}\,\mathrm{M}}{{v_0}^2\,\mathrm{R}}\right)$$

dans laquelle on reconnaît l'expression de v_ℓ. On en conclut que la masse m heurte la planète si

$$\boxed{b^2 < \mathrm{R}^2\left(\frac{{v_\ell}^2}{{v_0}^2} + 1\right)}$$