CCP Physique 2 PC 2010 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Pierre Fleury (ENS Lyon) ; il a été relu par Emmanuel Bourgeois (Professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Cette épreuve comporte deux problèmes indépendants.

- Le premier problème (optique) étudie les interférences entre deux ondes. On s'intéresse d'abord à la structure générale d'une onde plane monochromatique polarisée rectilignement, puis au principe des interférences, avant d'en étudier plusieurs applications faisant intervenir un interféromètre de Mach-Zehnder.
- Le second problème (thermodynamique) aborde quelques aspects du chauffage d'un habitat. L'ensemble de l'étude utilise une analogie entre systèmes thermodynamiques et circuits électriques. On s'intéresse d'abord à l'optimisation du temps de chauffage de l'habitat ; ensuite, aux économies réalisables avec un échangeur thermique ; enfin, la dernière partie aborde le principe de fonctionnement d'une pompe à chaleur.

L'ensemble est d'une longueur raisonnable. Le premier problème est dans l'ensemble très proche du cours ; le second est plus original mais reste bien guidé.

Indications

Problème I

1.2 Utiliser la relation donnée par l'énoncé et exprimer $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{E}})$ en utilisant successivement les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère.

2.1.3 Dans le cas de l'incidence normale, l'éclairement est la norme du vecteur de Poynting moyen.

3.2 Considérer deux atomes rayonnants et penser à la notion de train d'onde.

3.5 Utiliser le résultat de la question 2.1.3.

4.2.2 Utiliser les lois de Snell-Descartes et les relations de trigonométrie dans un triangle rectangle pour calculer $\text{A}'\text{B}'$ et $\text{A}'\text{H}'$.

4.2.3 Remarquer que le déphasage entre les deux voies est lié à la différence $\delta_2 - \delta_1$.

4.3.2 Le système est sensible vis-à-vis de la mesure d'angle si une petite variation de θ conduit à une forte variation de Φ.

4.3.3 Les interférences sont observables si la différence de marche est petite devant la longueur de cohérence. Que vaut le déphasage maximal si l'on ne veut voir passer qu'un seul maximum de brillance ?

Problème II

1.1.3.a Appliquer l'analogue thermique de la loi des nœuds.

1.2.2.a Remarquer que le problème est identique à celui de la question 1.2.1.a, à condition de remplacer Φ_0 par $\Phi_1\,(t)$.

1.2.3.a Reprendre le raisonnement de la question 1.2.2.a.

1.2.3.b Expliciter l'équation caractéristique de degré deux portant sur r et exprimer sa solution dans le cas du régime critique.

1.2.3.c Utiliser les conditions initiales sur θ et $\text{d}\theta/\text{d}t$.

2.1.2.d Montrer que les dérivées premières de θ_{c} et θ_{f} sont égales et que leurs dérivées secondes sont nulles. En déduire la forme générale de ces deux fonctions.

2.2.1 Au bout d'un cycle, une fonction d'état n'a globalement pas varié.

2.2.2 Introduire la durée d'un cycle.

2.2.3.c Utiliser $n_1 + n_2 = n$ et l'équation des gaz parfaits pour chaque compartiment.

2.2.3.d Exprimer S comme une intégrale sur V. Montrer que $\text{T}_1 + \text{T}_2 - \sqrt{2\,\text{T}_1\,\text{T}_2}$ est positif. Comparer J_i à Q_i en utilisant les valeurs de S et I.

2.2.4 Donner le lien entre la vitesse angulaire et la durée d'un cycle.

Interférométrie à deux ondes

1. Le champ électromagnétique dans le vide

1.1.1 Dans le jeu d'unités suggéré, $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ **s'exprime en farads par mètre** ($\mathrm{F.m^{-1}}$) et $\boldsymbol{\mu_0}$ **en henrys par mètre** ($\mathrm{H.m^{-1}}$).

> Une manière de retrouver ces unités à l'aide de relations usuelles est
>
> - pour ε_0, utiliser l'expression de la capacité d'un condensateur plan $\mathrm{C} = \varepsilon_0\,\mathrm{S}/e$ où S et e désignent respectivement la surface des armatures et la distance qui les sépare ;
> - pour μ_0, utiliser l'expression de l'inductance propre d'un solénoïde infini $\mathrm{L} = \mu_0\,n\,\mathrm{S}$ où n désigne son nombre de spires par unité de longueur et S la surface engendrée par une spire. Cette relation n'est pas rigoureusement au programme ; elle se démontre rapidement en utilisant l'expression du champ magnétique créé par un solénoïde infini, et la relation $\varphi = \mathrm{L\,I}$ reliant l'inductance propre L d'un circuit filiforme fermé à l'intensité I le traversant et au flux φ du champ magnétique auto-induit à travers toute surface engendrée par le circuit.
>
> Enfin, on peut tester le résultat à l'aide de $\varepsilon_0\,\mu_0 = 1/c^2$ et en se rappelant que le produit d'une inductance et d'une capacité est un temps au carré.

1.1.2 Dans le vide, en l'absence de charges et de courants, les quatre équations de Maxwell s'écrivent

$$\boxed{\begin{cases} \mathrm{div}\ \overrightarrow{\mathrm{B}} = 0 & \text{Maxwell-flux} \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{E}} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{\mathrm{B}}}{\partial t} & \text{Maxwell-Faraday} \\ \mathrm{div}\ \overrightarrow{\mathrm{E}} = 0 & \text{Maxwell-Gauss} \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{B}} = \varepsilon_0\,\mu_0\,\dfrac{\partial \overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t} & \text{Maxwell-Ampère} \end{cases}}$$

> Les deux premières équations sont indépendantes du milieu (relations intrinsèques au champ électromagnétique), les deux autres traduisent l'interaction entre les charges et les champs (relations extrinsèques) et s'écrivent dans le cas le plus général
>
> $$\mathrm{div}\ \overrightarrow{\mathrm{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
>
> $$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{B}} = \mu_0\,\overrightarrow{\jmath} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t}$$
>
> où ρ et $\overrightarrow{\jmath}$ désignent respectivement les densités volumiques macroscopiques de charges et de courants dans le milieu.

1.2 On utilise la relation d'analyse vectorielle fournie par l'énoncé

$$\Delta\overrightarrow{\mathrm{E}} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\ \overrightarrow{\mathrm{E}}) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{E}})$$

or $$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\ \overrightarrow{\mathrm{E}}) = \overrightarrow{0} \qquad \text{(Maxwell-Gauss)}$$

de plus $$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{E}}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(-\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{B}}}{\partial t}\right) \qquad \text{(Maxwell-Faraday)}$$

En admettant que les fonctions étudiées sont de classe au moins $\mathscr{C}^2$, le théorème de Schwarz s'applique et l'on peut permuter les dérivées partielles, ainsi

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{E}}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{B}}) = -\varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2\overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t^2} \qquad \text{(Maxwell-Ampère)}$$

d'où $$\boxed{\Delta\overrightarrow{\mathrm{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0} \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{c^2} = \varepsilon_0\,\mu_0}$$

L'équation de propagation du champ électrique est une équation de d'Alembert tridimensionnelle. Les solutions sont des ondes progressives de célérité

$$\boxed{c = 3.10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}}$$

2. L'onde progressive unidirectionnelle dans le vide

2.1.1 Le champ électrique au point M à t peut s'écrire

$$\overrightarrow{\mathrm{E}} = \overrightarrow{\mathrm{E}_0}\,\cos\left(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{E}_0} = (\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \mathrm{E}_3) \\ \overrightarrow{k} = \dfrac{\omega}{c}\,\overrightarrow{u_x} \end{cases}$$

Les surfaces équiphases sont donc des plans orthogonaux à $\overrightarrow{u_x}$.

$$\boxed{\text{L'onde se propage dans la direction et le sens de } \overrightarrow{u_x} \text{ à la vitesse } c.}$$

Calculons la divergence du champ électrique :

$$\mathrm{div}\ \overrightarrow{\mathrm{E}} = \frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial z} = \mathrm{E}_1\,\frac{\omega}{c}\,\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]$$

Pour satisfaire l'équation de Maxwell-Gauss en tout point et à chaque instant, il faut donc $\mathrm{E}_1 = 0$, d'où

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{E}}\cdot\overrightarrow{k} = 0}$$

On dit que l'onde est transverse électrique.

2.1.2 On cherche, pour le champ magnétique, une solution sous forme d'onde plane monochromatique :

$$\overrightarrow{\mathrm{B}} = \overrightarrow{\mathrm{B}_0}\,\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]$$

ainsi $$\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{B}}}{\partial t} = -\omega\,\overrightarrow{\mathrm{B}_0}\,\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]$$