CCP Physique 1 PC 2010 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Pierre-Marie Billangeon (ESPCI) ; il a été relu par Vincent Freulon (ENS Ulm) et Julie Zutter (Professeur en CPGE).

Cette épreuve se compose de deux problèmes indépendants.

- Le premier porte sur les oscillateurs à relaxation. L'étude débute par le classique vase de Tantale. On commence par étudier le cas d'un réservoir seul, puis la modification du débit sortant quand on lui adjoint un siphon. Le but est de déterminer les conditions nécessaires à l'observation d'oscillations du niveau d'eau dans le vase. Toute cette partie utilise des notions de mécanique des fluides. Ensuite, on s'intéresse à un analogue électronique, le multivibrateur astable.
- La second problème couvre différents aspects de l'effet Doppler dans le cas d'ondes acoustiques. Après avoir examiné quelques cas simples, on procède à quelques rappels sur la propagation du son dans le cadre de l'approximation acoustique. On étudie ensuite le cas d'un tube unidimensionnel, puis l'exemple de la vélocimétrie Doppler. Cette partie aborde principalement la physique de la propagation d'ondes sonores, et requiert une bonne compréhension de l'approximation acoustique.

Ce sujet ne comporte pas ni difficultés majeures, ni développements calculatoires excessifs. Il est bien adapté pour vérifier que le cours est assimilé.

Indications

Problème I

I.2.1 Utiliser le fait que la surface libre du fluide et l'orifice sont à la pression atmosphérique P_0.

I.3.1 Prendre en compte le débit incident D_i.

I.3.2 Utiliser le résultat de la question I.3.1, et chercher la valeur de h telle que $\dot{h} = 0$.

I.3.3 Le siphon se réamorce lorsque la continuité de l'écoulement du fluide dans le siphon est rétablie, c'est-à-dire lorsque le niveau de la surface libre atteint z_C.

I.3.5 Dans le cas où l'on peut négliger le débit incident D_i par rapport au débit sortant D_s, l'équation différentielle, qui décrit l'évolution temporelle du niveau d'eau dans le réservoir $h(t)$, est identique à celle établie à la question I.2.2.

I.4.1 Utiliser le fait que l'amplificateur opérationnel est considéré comme idéal pour écrire que les courants d'entrée sont nuls, puis appliquer la loi des noeuds.

I.4.3 En mode saturé, les tensions d'entrée sont différentes. Ceci permet de justifier le basculement entre $\pm V_{sat}$ de la tension de sortie, et donc les oscillations.

Problème II

II.1.2 Lorsqu'un bip est émis à l'instant θ_i par la source en mouvement, il lui faut parcourir la distance $(d - i\,(v_0\,\tau_0))$ pour atteindre l'observateur.

II.1.4 Entre l'instant t_i où le bip est émis par la source, et celui où il est détecté par l'observateur en mouvement θ'_i, l'onde sonore, ainsi que le détecteur, parcourent la distance qui les sépare $(d - i\,(v_0\,\tau_0))$ à leur vitesse respective c et v_0, soit

$$(v_0 + c)\,(\theta'_i - t_i) = d - i\,(v_0\,\tau_0)$$

II.2.1 Utiliser la loi de Laplace.

II.2.2 Écrire la différentielle logarithmique de la loi de Laplace.

II.2.3 Combiner l'équation de conservation de la masse à l'équation d'Euler linéarisée, pour retrouver l'équation de d'Alembert, vérifiée par le champ de surpression.

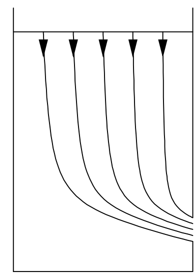
II.3.2 On peut par exemple partir de l'équation d'Euler linéarisée, telle qu'elle est rappelée à la question II.2.3, que l'on intègre par rapport au temps.

II.4.2 En supposant que les ondes incidente et réfléchie se propagent au voisinage de la cloison comme si le fluide qui l'entoure était au repos, la condition de continuité de la vitesse normale reste valable lorsque celle-ci est en mouvement. Utiliser à nouveau le fait que les ondes incidente et réfléchie vérifient l'équation de d'Alembert pour écrire leur relation de dispersion respective. Cette dernière relie respectivement les pulsations ω_i et ω_r aux vecteurs d'onde k_i et k_r.

I. Oscillateurs à relaxation

I.1 Vidange d'un réservoir

I.1.1 Une ligne de courant à un instant donné est en tout point tangente au vecteur vitesse dans le fluide. Les lignes de courant sont orthogonales à la surface libre : en effet, à ce niveau la pression est uniformément égale à la pression atmosphérique, et le champ de pesanteur est lui aussi identique en tout point. Par conséquent, la vitesse du fluide est en tout point égale au niveau de la surface libre. On peut donc représenter schématiquement l'allure plausible des lignes de courant dans le cas du réservoir.



> Si l'on considère un champ de vitesse $\overrightarrow{v}(t)$, ainsi qu'un élément $\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$ d'une ligne de courant, il vient
>
> $$\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{0}$$
>
> Pour déterminer les lignes de courant, il faut donc résoudre à t fixé le système d'équations différentielles
>
> $$\frac{\mathrm{d}x}{v_x} = \frac{\mathrm{d}y}{v_y} = \frac{\mathrm{d}z}{v_z}$$

I.1.2 Pour l'écoulement d'un fluide parfait incompressible et homogène, en régime permanent, tel que toutes les forces dérivent du potentiel ϕ, le théorème de Bernoulli établit que

$$\mathrm{P} + \phi + \frac{1}{2}\,\rho\, v^2 = \mathrm{C^{te}}$$

Dans le champ de pesanteur, $\phi = \rho\, g\, z$, d'où

$$\boxed{\mathrm{P} + \rho\, g\, z + \frac{1}{2}\,\rho\, v^2 = \mathrm{C^{te}}}$$

En particulier, entre un point de la surface libre du réservoir où $v = \dot{h}$, $\mathrm{P} = \mathrm{P_0}$, $z = h$, et l'orifice B où $\mathrm{P(B)} = \mathrm{P_0}$, on trouve

$$\mathrm{P_0} + \rho\, g\, h + \frac{1}{2}\,\rho\, \dot{h}^2 = \mathrm{P_0} + \rho\, g\, z_\mathrm{B} + \frac{1}{2}\,\rho\, {v_\mathrm{B}}^2$$

La vitesse du fluide au niveau de B s'écrit donc

$$\boxed{v_\mathrm{B} = \sqrt{2\, g\,(h - z_\mathrm{B}) + \dot{h}^2}}$$

Le débit sortant $\mathrm{D_s}$ est le produit de la vitesse du fluide au niveau de l'orifice B, par la section droite de ce dernier, soit

$$\boxed{\mathrm{D_s} = \sigma\, \sqrt{2\, g\,(h - z_\mathrm{B}) + \dot{h}^2}}$$

I.1.3 La valeur algébrique de $\dot{h}$ est reliée au débit d'eau $\mathrm{D_s}$ sortant par B selon

$$\mathrm{S}\,\dot{h} = -\mathrm{D_s} = -\sigma\,\sqrt{2\,g\,(h-z_\mathrm{B}) + \dot{h}^2} \quad \text{car} \quad \dot{h} < 0$$

d'où
$$(\mathrm{S}^2 - \sigma^2)\,\dot{h}^2 = \sigma^2\,2\,g\,(h - z_\mathrm{B})$$

Soit finalement,
$$\boxed{\dot{h} = -\frac{\sigma}{\sqrt{\mathrm{S}^2-\sigma^2}}\,\sqrt{2\,g\,(h-z_\mathrm{B})}}$$

Dans la limite où la section droite σ de l'orifice B est très petite devant celle du réservoir, il vient

$$\frac{\sigma}{\sqrt{\mathrm{S}^2-\sigma^2}} \approx \frac{\sigma}{\mathrm{S}}$$

Alors, l'expression de la vitesse de la surface libre $\dot{h}$ se simplifie selon

$$\boxed{\dot{h} = -\frac{\sigma}{\mathrm{S}}\,\sqrt{2\,g\,(h-z_\mathrm{B})}}$$

Ainsi
$$v_\mathrm{B} = \sqrt{2\,g\,(h-z_\mathrm{B})\left(1+\left(\frac{\sigma}{\mathrm{S}}\right)^2\right)}$$

Comme $\sigma/\mathrm{S} \ll 1$, à l'ordre le plus bas, on trouve

$$\boxed{v_\mathrm{B} = \sqrt{2\,g\,(h-z_\mathrm{B})}}$$

Ceci revient à négliger la vitesse de la surface libre du fluide dans le réservoir par rapport à celle au niveau de B, ce qui est pleinement justifié lorsque $\sigma \ll \mathrm{S}$. On retrouve la formule de Torricelli.

I.1.4 On peut donc estimer la valeur du débit sortant $\mathrm{D_s}$ pour les paramètres donnés dans l'énoncé.

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{D_s} &= 1.10^{-3}\ \mathrm{m^3.s^{-1}}\\ &= 1\ \mathrm{L.s^{-1}}\end{aligned}}$$

I.2 Influence du siphon

I.2.1 Lorsque le siphon est amorcé, celui-ci ne contenant pas d'air, on peut écrire le théorème de Bernoulli entre la surface libre du réservoir où $v \ll v_\mathrm{D}$, et l'extrémité du siphon D, qui sont tous deux en contact avec l'air à pression atmosphérique $\mathrm{P_0}$

$$\mathrm{P_0} + \rho\,g\,h = \mathrm{P_0} + \rho\,g\,z_\mathrm{D} + \frac{1}{2}\,\rho\,{v_\mathrm{D}}^2$$

d'où
$$v_\mathrm{D} = \sqrt{2\,g\,(h-z_\mathrm{D})}$$

Par conséquent, le réservoir se vide avec un débit $\mathrm{D_s}$, tel que

$$\boxed{\mathrm{D_s} = \sigma\,\sqrt{2\,g\,(h-z_\mathrm{D})}}$$