X Maths PC 2010 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Leclère (École Polytechnique) ; il a été relu par Gilbert Monna (Professeur en CPGE) et Tristan Poullaouec (Professeur agrégé).

Le sujet se compose de trois parties traitant d'équations intégrales. Elles ont de nombreux points communs avec les équations différentielles et ont une importance historique pour le traitement de ces dernières. Trois exemples d'équations intégrales sont traités par des méthodes d'analyse dans une première partie, puis par des méthodes algébriques dans une deuxième partie. La partie III présente une méthode de résolution générale de ces équations intégrales à l'aide de séries entières.

- La première partie se compose de trois exercices d'analyse, indépendants et relativement simples. Ils nécessitent des calculs ne requérant souvent qu'au plus un changement de variable. Les questions d'unicité peuvent être plus délicates.
- La deuxième partie reprend les trois exemples, avec une approche algébrique cette fois. Elle est indépendante de la première et les deux exercices ne sont pas reliés l'un à l'autre. La dernière question est ouverte, ce qui est toujours délicat à traiter. Cette partie est également simple, mais nécessite un peu plus d'intuition que la première.
- La troisième partie traite des équations de Fredholm-Volterra du second ordre du type

  $$\phi(x) = f(x) + z\int_a^b \mathrm{N}(x,y)\phi(y)\,\mathrm{d}y$$

  où l'inconnue est la fonction ϕ. N est appelé le noyau de l'équation et si f est nulle alors l'équation est dite homogène. Le nombre z peut être vu comme une généralisation de la notion de valeur propre. Cette partie est très calculatoire mais la plupart des idées nécessaires à la réussite des calculs sont intuitives et une approche méthodique, en réécrivant in extenso les choses à démontrer, permet d'aboutir. Par ailleurs, les questions ne sont pas bloquantes car les formules données permettent de poursuivre.

Le sujet est assez calculatoire et balaie largement le programme, avec quelques excursions en dehors. Il est possible d'assurer une note honorable en traitant l'ensemble des questions faciles et quelques-unes, plus difficiles, dont on aura vu l'astuce.

Indications

1.a Multiplier E_z par e^{-x} puis intégrer par rapport à x.

2.a Utiliser le théorème de Fubini puis un changement de variable.

2.b S'inspirer de la question précédente en introduisant la fonction h adaptée à l'étude de (F_z).

3 Dériver pour retrouver une équation différentielle.

4.a Chercher un inverse de la forme $\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} + \lambda\mathrm{A}$.

4.b Appliquer directement le résultat précédent.

5.a Prendre un vecteur propre et en calculer les coefficients de Fourier, puis exhiber des vecteurs propres associés à chaque $\widehat{\mathrm{K}}(n)$.

5.b La question ouverte pourrait supporter un certain nombre de réponses, la plus simple à pousser jusqu'au bout consiste à réutiliser le raisonnement établi à la question 4.

6.a La démonstration se fait par récurrence en utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité.

6.b Montrer par récurrence une majoration de $||\mathrm{N}_k||_\infty$ à partir de la majoration de $|\mathrm{N}|$ par M.

6.c Il faut chercher à exprimer chaque membre de l'égalité à démontrer sous forme d'intégrale de série entière, pour pouvoir utiliser la définition par récurrence des fonctions N_k.

7 Il est plus facile de manipuler les déterminants sous leur forme usuelle. Pour obtenir la première égalité, il faut s'aider de la partie droite de l'égalité afin de déterminer la ligne selon laquelle il faut développer le déterminant.

8 Il faut partir de l'expression de c_n en fonction de N et développer grâce à la question 7. Le premier terme obtenu se ramène au premier terme de la question 8 $\mathrm{N}(x,y)a_n$, le second terme est une somme à n éléments qui valent chacun

$$\int_a^b \mathrm{N}(x,s)c_{n-1}(s,y)\mathrm{d}s$$

9 La majoration de a_n s'effectue en reprenant la définition pour obtenir une intégrale multiple sur N et en appliquant l'inégalité de Hadamard. On conclut sur le rayon de convergence par la règle de d'Alembert et un théorème de comparaison ou en exploitant la formule de Stirling.

10 Reprendre la démarche précédente.

11 Si l'on réécrit l'égalité à obtenir avec des séries entières, on peut chercher à appliquer, après un changement d'indice adéquat, la formule de la question 8.

12 Dans un premier temps, il faut montrer que la fonction proposée est bien solution de l'équation (I_z). Injecter à cet effet la fonction ϕ_z proposée par l'énoncé dans l'équation et montrer que cela se réduit à $f(x)$.

Dans un second temps, il est nécessaire d'établir l'unicité de la solution, et c'est loin d'être évident. Une approche algébrique est ici possible en réinterprétant (I_z) comme une équation du type $\mathrm{B}\phi_z = f$, avec B un opérateur linéaire. La solution ϕ_z est de la forme $\phi_z = \mathrm{A}f$ avec A un opérateur linéaire. Il convient de montrer ici que A et B commutent. Dans cette optique, on doit développer les déterminants de la question 7 d'une autre manière.

I. Étude de quelques équations intégrales

1.a Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$. Soit ϕ_z une solution de (E_z).

> Il est regrettable que les auteurs de l'énoncé supposent qu'une notation utilisée pour désigner l'inconnue d'une équation soit ensuite utilisée pour désigner une solution de ladite équation sans précision.

On a par définition $$\xi_z = \int_0^1 \mathrm{e}^{-y}\phi_z(y)\,\mathrm{d}y$$

D'après (E_z), on a pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$,

$$\phi_z(x) - z\int_0^1 \mathrm{e}^{x-y}\phi_z(y)\,\mathrm{d}y = f(x)$$

En multipliant par e^{-x}, on obtient

$$\mathrm{e}^{-x}\phi_z(x) - z\int_0^1 \mathrm{e}^{x-y}\mathrm{e}^{-x}\phi_z(y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-x}\phi_z(x) - z\xi_z = \mathrm{e}^{-x}f(x)$$

En intégrant par rapport à x sur $[\,0\,;1\,]$ pour faire apparaître ξ_z, il vient

$$\xi_z - z\xi_z = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}f(x)\,\mathrm{d}x$$

soit $$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{1\} \qquad \xi_z = \frac{1}{1-z}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}f(x)\,\mathrm{d}x}$$

1.b L'équation (E_z) s'écrit

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \phi_z(x) - z\mathrm{e}^{x}\xi_z = f(x)$$

d'où, en remplaçant ξ_z par son expression,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{L'équation } (\mathrm{E}_z) \text{ possède une unique solution } \phi_z \text{ définie par}\\ \forall\, z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{1\} \quad \forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \phi_z(x) = f(x) + \dfrac{z}{1-z}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x-y}f(y)\,\mathrm{d}y\end{array}}$$

2.a Commençons par montrer les propriétés voulues sur h :

- pour tout $t \in [\,-\pi\,;\pi\,]$, la fonction $x \mapsto \mathrm{K}(x-t)g(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \mathrm{K}(x-t)g(t)$ est intégrable sur $[\,-\pi\,;\pi\,]$ car continue ;
- les fonctions g et K étant continues et périodiques, elles sont bornées. On peut donc majorer $|\mathrm{K}(x-t)g(t)|$ par une constante, c'est-à-dire par une fonction intégrable sur un segment.

Par conséquent, le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre fournit la continuité de h. La périodicité provient directement de la périodicité de K. En effet,

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad h(x+2\pi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{K}(x+2\pi-t)g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{K}(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t = h(x)$$

Calculons les coefficients de Fourier de h. Soit n un entier relatif,

$$\begin{aligned}\widehat{h}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{K}(t-u)g(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\widehat{h}(n) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{K}(t-u)g(u)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{K}(t-u)\mathrm{e}^{-in(t-u)}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-inu}g(u)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $v = t-u$ dans la première intégrale, il vient

$$\widehat{h}(n) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi-u}^{\pi-u}\mathrm{K}(v)\mathrm{e}^{-inv}\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{e}^{-inu}g(u)\,\mathrm{d}u$$

La 2π-périodicité de la fonction $v\mapsto \mathrm{K}(v)\mathrm{e}^{-inv}$ permet d'affirmer que l'intégrale sur un segment de longueur 2π est indépendante du point de départ, ainsi

$$\begin{aligned}\widehat{h}(n) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{K}(v)\mathrm{e}^{-inv}\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{e}^{-inu}g(u)\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{K}(v)\mathrm{e}^{-inv}\,\mathrm{d}v\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(u)\mathrm{e}^{-inu}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Et enfin,
$$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{Z}\qquad \widehat{h}(n) = \widehat{\mathrm{K}}(n)\widehat{g}(n)}$$

2.b Raisonnons par analyse/synthèse en cherchant des propriétés sur une éventuelle solution, puis en prouvant l'existence et l'unicité d'une fonction ϕ_z ayant ces propriétés, et enfin en montrant que cette fonction ϕ_z est bien solution de (F_z).

Pour $z\in\mathbb{C}\smallsetminus\{1\}$ donné, considérons une solution ϕ_z de l'équation (F_z) et cherchons à en calculer ses coefficients de Fourier. En s'inspirant des questions précédentes, on introduit

$$h_z : x\mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{K}(x-t)\phi_z(t)\,\mathrm{d}t$$

fonction continue, 2π-périodique qui vérifie

$$\forall n\in\mathbb{Z}\qquad \widehat{h_z}(n) = \widehat{\mathrm{K}}(n)\widehat{\phi_z}(n)$$

d'après la question précédente. L'équation intégrale (F_z) peut alors s'écrire

$$\phi_z(x) - z h_z(x) = f(x)$$

et le calcul des coefficients de Fourier des deux membres donne

$$\forall n\in\mathbb{Z}\qquad \widehat{\phi_z}(n) - z\widehat{\mathrm{K}}(n)\widehat{\phi_z}(n) = \widehat{f}(n) \tag{1}$$

par linéarité des coefficients de Fourier. En se souvenant que $z\widehat{\mathrm{K}}(n)\neq 1$, on peut en déduire les coefficients de Fourier de ϕ_z :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour tout } z\in\mathbb{C}\smallsetminus\{1\} \text{ vérifiant } z\widehat{\mathrm{K}}(n)\neq 1 \text{ pour tout entier } n\text{, on a}\\ \qquad\forall n\in\mathbb{Z}\qquad \widehat{\phi_z}(n) = \dfrac{1}{1-z\widehat{\mathrm{K}}(n)}\widehat{f}(n)\end{array}}$$