Mines Maths 1 MP 2010 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Gilbert Monna (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Benoît Landelle (Professeur en CPGE) et Guillaume Batog (ENS Cachan).

Ce problème porte sur les fonctions d'une variable complexe. Il fait découvrir quelques aspects de cette magnifique théorie en n'utilisant que les notions et les outils du programme de prépa. Cette étude fort intéressante permet de constater des différences fondamentales entre les fonctions de deux variables réelles et les fonctions d'une variable complexe, malgré l'isomorphisme classique $(x, y) \longmapsto x + \mathrm{i}\, y$ entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$. Par exemple, pour une fonction de deux variables réelles, un prolongement consistera classiquement à définir la fonction sur le bord d'un disque à partir de ses valeurs sur le disque ouvert, tandis qu'avec une variable complexe, on définit la fonction sur tout le disque à partir de ses valeurs sur le bord… Comme quoi l'introduction du corps des complexes fait beaucoup plus que fournir des solutions à l'équation $x^2 + 1 = 0$.

- Les premières questions utilisent les séries entières et la dérivation d'une série de fonctions, avec déjà une petite difficulté puisque l'on dérive par rapport à une variable réelle une fonction définie par une variable complexe. Une application du théorème de densité de Weierstrass suit dans le cas des fonctions trigonométriques, puis des questions plus techniques conduisent au théorème de prolongement.
- On trouve en partie B deux applications, l'une, assez spectaculaire, au calcul des coefficients de Fourier d'une fonction 2π-périodique, puis une seconde dont l'intérêt est peut-être moins évident.
- Enfin dans la partie C, on étudie une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues du cercle trigonométrique dans $\mathbb{C}$ et on en donne des propriétés caractéristiques.

Le sujet n'est pas très progressif : la partie C est nettement plus facile que la partie B ou que les questions 9 et 10 de la partie A. Ce problème original convient très bien lors des révisions pour se préparer à traiter efficacement un sujet qui sort des sentiers battus.

Indications

1 Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée.

2 Appliquer le théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions de variable réelle, en utilisant les hypothèses données sur la fonction

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x+\mathrm{i}y)^n$$

4 Appliquer la question précédente à la fonction g_f.

5 Utiliser l'expression intégrale des coefficients c_n.

6 Pour le calcul de l'intégrale, penser à utiliser la fonction constante égale à 1. Pour déterminer le signe de P_z, chercher son expression en fonction de z.

7 Se servir des résultats de la question précédente sur le signe de $\mathrm{P}_z(t)$ et la valeur de son intégrale sur $[\,-\pi\,;\pi\,]$.

8 Utiliser le théorème de Weierstrass d'approximation des fonctions périodiques par une suite de polynômes trigonométriques.

9 Remarquer d'abord que si le maximum est atteint en un point de T, alors on a le résultat. Montrer ensuite que le maximum ne peut être atteint en un point de D du fait de la condition $\Delta u(z) > 0$ pour tout z de D. On pourra utiliser les applications partielles $x \mapsto \widetilde{u}(x,y)$ et $y \mapsto \widetilde{u}(x,y)$.

10 Pour passer aux fonctions complexes, utiliser la partie réelle et la partie imaginaire de G. Pour passer au cas f non nulle, ramenez-vous au cas où f est la fonction nulle en considérant $\mathrm{G}-\mathrm{G}_f$.

11 Appliquer les résultats de la partie A à la fonction $(x,y)\mapsto \mathrm{e}^{\,x}\cos(y)$, puis poser $y=0$. Utiliser le développement en série entière de la fonction exponentielle.

12 Se ramener à D par un changement de variable pour un sens, utiliser la dérivation des intégrales dépendantes d'un paramètre pour l'autre. Pour montrer que $\Delta\mathrm{P}_z(t)$ est nul, utiliser des résultats antérieurs plutôt qu'un calcul.

14 Utiliser la question 6.

15 Commencer par l'égalité sur $\mathcal{P}(\mathrm{T})$ puis utiliser la densité de $\mathcal{P}(\mathrm{T})$ dans $\mathcal{C}(\mathrm{T})$.

16 Commencer par majorer $|h(z)|^2$. Utiliser ensuite le fait que la fonction continue $z\mapsto |h(z)|$ atteint ses bornes sur le compact T.

17 Développer $|\varphi(h)|^2$ puis étudier le comportement asymptotique quand λ tend vers l'infini.

18 Décomposer la fonction en somme de sa partie positive et de sa partie négative.

Les conseils du jury

Le jury rappelle les mêmes conseils sur cette épreuve depuis plusieurs années. Il faut être très soigneux dans la rédaction d'une question dont la réponse est donnée : citez très précisément les théorèmes utilisés, ainsi que les résultats antérieurs (avec les numéros des questions correspondantes), évitez « de court-circuiter la moindre étape ».

Le jury conseille également aux candidats qui ne savent pas traiter une question et qui en admettent le résultat pour continuer de le dire clairement : « tout acte d'honnêteté est très apprécié ; en revanche, toute tentative de dissimulation ou de tricherie indispose les correcteurs et peut être très pénalisante. »

A. Prolongement harmonique

1 La famille $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la suite des coefficients de Fourier de la fonction continue $t \mapsto f(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t})$. D'après le lemme de Lebesgue, la suite des coefficients de Fourier d'une fonction continue tend vers 0 quand $|n|$ tend vers $+\infty$, elle est donc bornée. En d'autres termes, il existe un réel M tel que

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad |c_n| \leqslant \mathrm{M}$$

Soit z un élément de D. Comme $|z| < 1$, les séries géométriques $\sum |z|^n$ et $\sum |\overline{z}|^n$ sont convergentes. Comme de plus $|c_n\, z^n| \leqslant \mathrm{M}\, |z|^n$ et $|c_{-n}\, \overline{z}^n| \leqslant \mathrm{M}\, |\overline{z}|^n$, il résulte du théorème de comparaison des séries à termes positifs que

$$\boxed{\text{Les séries } \textstyle\sum c_n\, z^n \text{ et } \sum c_{-n}\, \overline{z}^n \text{ sont absolument convergentes donc convergentes.}}$$

On peut éviter le lemme de Lebesgue en majorant directement $|c_n|$

$$|c_n| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t})\,\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t})\right|\left|\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}nt}\right|\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t})\right|\mathrm{d}t$$

donc la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On peut de plus remarquer que f est continue sur le compact T, ce qui implique que la fonction $t \mapsto \left|f(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t})\right|$ est majorée par le nombre réel $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{z\in\mathrm{T}} |f(z)|$ noté $\mathrm{N}(f)$ dans la partie C.

Le lemme de Lebesgue permettait de démontrer rapidement que la famille $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée, pourtant le jury signale qu'il a été peu utilisé, et même que certains candidats ont invoqué une soi-disant convergence normale de la série de Fourier d'une fonction continue.

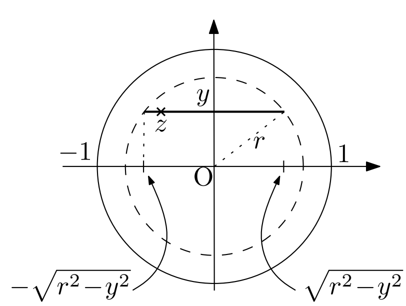
2 Rappelons un théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un segment $[\,a\,;b\,]$. On suppose que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$;
- la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[\,a\,;b\,]$;
- la série dérivée $\sum (f_n)'$ converge uniformément sur $[\,a\,;b\,]$.

Alors la fonction $\sum f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,a\,;b\,]$ et a pour dérivée la fonction $\sum (f_n)'$.

La série $\sum a_n\, z^n$ est une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 donc la série dérivée $\sum n\, a_n\, z^n$ est également de rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $z = x + \mathrm{i}\, y$. Soit r un réel positif tel que $|z| < r < 1$. On fixe $y \in\,]-1\,;1\,[$. Soit l'intervalle

$$\mathrm{I}_y = \left]\, -\sqrt{r^2 - y^2}\,;\sqrt{r^2 - y^2}\,\right[$$



Pour x élément de I_y, on considère la série de fonctions $\sum a_n\,(x + \mathrm{i}\, y)^n$ de la variable réelle x de série dérivée $\sum n\, a_n\,(x+\mathrm{i}\, y)^{n-1}$. Comme la série $\sum n\, |a_n|\, r^n$ est convergente (puisque $r < 1$) et que $|n\, a_n\,(x + \mathrm{i}\, y)^n| < n\, |a_n|\, r^n$, on en déduit la convergence normale donc uniforme sur l'intervalle I_y de la série de fonctions de la variable réelle x : $\sum n\, a_n\, (x+\mathrm{i}\, y)^{n-1}$. La série dérivée étant normalement convergente, la somme de la série S est une fonction dérivable qui a pour dérivée la somme de la série dérivée.

Pour tout point (x,y) de $\widetilde{\mathrm{D}}$, la fonction $\widetilde{\mathrm{S}}$ admet une dérivée partielle continue par rapport à x et
$$\frac{\partial \widetilde{\mathrm{S}}}{\partial x}(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, (x+\mathrm{i}\, y)^{n-1}$$

Une erreur fréquente signalée par le rapport du jury consistait à appliquer directement le théorème de dérivabilité d'une série entière, ce qui revient à dériver par rapport à une variable complexe, alors qu'il s'agit de dériver par rapport à la variable réelle x. Une autre erreur fréquente pointée par le rapporteur : affirmer qu'une série entière converge normalement sur son disque ouvert de convergence, résultat qui n'est pas toujours vrai, que certains candidats confondent avec la convergence normale sur tout disque fermé contenu dans la disque ouvert de convergence. Cette question a été en fait très mal traitée puisque le rapport du jury signale en plus des lacunes dans le théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions.

3 La série des dérivées secondes $\sum n\,(n-1)\, a_n\, (x+\mathrm{i}\, y)^{n-2}$ est la série dérivée seconde de $\sum a_n\, (x+\mathrm{i}\, y)^n$, elle admet le même rayon de convergence supérieur ou égal à 1. En reprenant le raisonnement précédent, on montre que la fonction $\widetilde{\mathrm{S}}$ admet une dérivée seconde continue par rapport à x
$$\frac{\partial^2 \widetilde{\mathrm{S}}}{\partial x^2}(x,y) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, a_n\, (x+\mathrm{i}\, y)^{n-2}$$
une dérivée première continue par rapport à y
$$\frac{\partial \widetilde{\mathrm{S}}}{\partial y}(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{i}\, n\, a_n\, (x+\mathrm{i}\, y)^{n-1}$$
et une dérivée seconde continue par rapport à y
$$\frac{\partial^2 \widetilde{\mathrm{S}}}{\partial y^2}(x,y) = \sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{i}^2\, n(n-1)\, a_n\, (x+\mathrm{i}\, y)^{n-2} = -\frac{\partial^2 \widetilde{\mathrm{S}}}{\partial x^2}(x,y)$$
Par conséquent, $\widetilde{\mathrm{S}}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\widetilde{\mathrm{D}}$ et
$$\boxed{\forall z \in \mathrm{D} \qquad \Delta \mathrm{S}(z) = \frac{\partial^2 \widetilde{\mathrm{S}}}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 \widetilde{\mathrm{S}}}{\partial y^2}(x,y) = 0}$$

4 D'après la question 1, les séries $\sum c_n\, z^n$ et $\sum c_{-n}\, \overline{z}^n$ sont convergentes pour tout nombre complexe z de module strictement inférieur à 1 donc de rayon de convergence supérieur ou égal à 1. On peut ainsi leur appliquer les résultats de la question précédente, ce qui entraîne que

$$\boxed{\text{La fonction } g_f \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur D et } \Delta g_f(z) = 0 \text{ pour tout } z \in \mathrm{D}.}$$

On trouve dans le rapport du jury : « Question a priori facile mais trop souvent bâclée. » On peut penser que les erreurs ont consisté à oublier de justifier que le rayon de convergence était supérieur ou égal à 1 ou de faire référence aux questions 1 et 3.