Centrale Maths 2 MP 2010 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Batog (ENS Cachan) ; il a été relu par Victor Rabiet (ENS Cachan) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Le sujet propose d'établir une longue série de résultats autour des formes quadratiques et de leurs isométries associées afin de démontrer deux théorèmes classiques (et non triviaux dans ce contexte) :

- le théorème de Cartan-Dieudonné qui énonce que toute isométrie d'un espace quadratique de dimension n est la composée d'au plus n réflexions ;
- le théorème de Witt qui affirme que toute isométrie entre deux sous-espaces s'étend en une isométrie sur l'espace tout entier.

Ce problème d'algèbre se compose de quatre parties totalement dépendantes, de difficulté exponentielle, avec plusieurs pics à franchir pour espérer pouvoir débuter certaines questions ensuite.

- La première partie introduit les formes bilinéaires symétriques et les formes quadratiques. Il s'agit d'approfondir légèrement les résultats du cours sur ces objets pour définir ensuite les espaces artiniens.
- La deuxième partie se concentre sur les sous-espaces singuliers F d'un espace quadratique, c'est-à-dire ceux qui possèdent un vecteur non nul qui appartient à leur orthogonal (ce qui est impossible dans un espace euclidien). À la fin de cette partie, on construit le plus petit sous-espace non singulier contenant un sous-espace singulier donné. Attention en particulier à la question II.C.2, difficile à traiter même sans la pression du concours, mais dans laquelle la construction proposée est indispensable à comprendre pour la suite.
- Dans la troisième partie, on caractérise les isométries d'un espace quadratique, notamment les réflexions orthogonales. Il s'ensuit trois conditions suffisantes pour qu'une isométrie soit positive. La dernière est *a priori* loufoque mais nécessaire pour la démonstration d'un sous-cas qui apparaît dans la suite du problème.
- La quatrième partie est consacrée à la démonstration des théorèmes de Cartan-Dieudonné et de Witt. Extrêmement difficile, inabordable en l'espace de quatre heures, elle est destinée aux rares élèves qui, après avoir avalé quantité d'algèbre indigeste, seraient encore intéressés par cette théorie, passionnante sur le fond, des formes quadratiques.

Ce problème reste malheureusement fidèle à la tradition des sujets interminables de Centrale. Toutefois, ce sont les premières parties qui font la différence entre les copies car elles permettent de vérifier si les connaissances du cours sont bien acquises. Ici, cela concerne les parties I, II.A, II.B et III.A où on trouve matière à réviser l'algèbre linéaire classique (bases duales, changements de coordonnées, symétries,...) dans un contexte non familier. C'est avant tout pour cette raison que ce sujet mérite qu'on s'y attarde.

Indications

Partie I

I.A.3 Faire apparaître le noyau de h dans la définition de $\mathrm{E}^{\perp\varphi}$.

I.A.4.a Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, exprimer $h(e_i)(y)$ en fonction des coordonnées $(y_1, \ldots, y_n)$ du vecteur y dans la base e. Se souvenir ensuite que ${e_j}^*(y) = y_j$.

I.A.4.b Utiliser la bilinéarité de ϕ avec les décompositions de x et y dans la base e.

I.B.1 Exprimer $\varphi(x, y)$ en fonction de $q(x + y)$, $q(x)$ et $q(y)$.

I.B.2 Étant donnée une isométrie $f : (\mathrm{E}, q) \longrightarrow (\mathrm{E}', q')$, montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, $\varphi(x, y) = \varphi'(f(x), f(y))$. Ce résultat est utile dans la suite du problème. Réciproquement, étant données deux bases e et e' dans lesquelles les matrices de q et q' (respectivement) sont égales, considérer l'isomorphisme $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}'$ qui envoie e sur e'.

I.B.3.b Utiliser la caractérisation suivante : q est non dégénérée si et seulement si, pour toute base e de E, $\operatorname{Mat}(q, e)$ est inversible.

I.B.3.c S'inspirer de l'égalité $a^2+b^2 = (a+\mathrm{i}\, b)(a-\mathrm{i}b)$ pour trouver le bon changement de coordonnées dans $\mathbb{C}^{2p}$.

I.B.3.e Chercher d'abord un tel espace G pour l'espace artinien canonique $(\mathbb{K}^{2p}, q_p)$.

Partie II

II.A.1.a Montrer qu'une forme linéaire est identiquement nulle sur F si et seulement si elle appartient à $\operatorname{Vect}({e_{p+1}}^*, \ldots, {e_n}^*)$.

II.A.1.c Il suffit de montrer l'inclusion $\mathrm{F} \subseteq (\mathrm{F}^\perp)^\perp$.

II.A.2.a Établir l'égalité par double inclusion.

II.A.2.b Appliquer l'orthogonal à l'égalité précédente.

II.A.3 Vérifier que $\mathrm{F} \cap \mathrm{F}^\perp = \mathrm{F}^{\perp\varphi_\mathrm{F}}$.

II.A.4 Montrer dans un premier temps que F et G sont en somme directe. Dans un second temps, utiliser la première propriété de la question précédente pour montrer que la somme est non singulière.

II.B.3 Partir des expressions de $h(e_i)$ et $h'(e_i)$ dans la base duale e^*.

II.B.4 Considérer une base de vecteurs propres de $h^{-1} \circ h$.

II.C.1.a Utiliser le résultat de la question I.A.3.

II.C.1.c Calculer la quantité $q(\alpha\, x + \beta\, y)$ pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.

II.C.2.a Se souvenir que $\mathrm{F} \cap \mathrm{F}^\perp = \mathrm{F}^{\perp\varphi_\mathrm{F}} = \operatorname{Ker} h_\mathrm{F}$ où $h_\mathrm{F} : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{F}^*$ est défini par $h_\mathrm{F}(x)(y) = \varphi_\mathrm{F}(x, y)$.

II.C.2.b Choisir un vecteur $\widetilde{e}_1$ dans $\mathrm{G}'^\perp \cap \mathrm{F}^\perp$ où $\mathrm{G}' = \mathrm{G} + \operatorname{Vect}(e_2, \ldots, e_{s+1})$ puis appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathrm{F}' = \mathrm{G}' + \mathrm{P}_1$.

II.C.3 Utiliser le résultat de la question II.A.4.

II.C.4 Remarquer que $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{F}^\perp$ si $q_{|\mathrm{F}} = 0$.

II.C.5 Pour montrer que (E, q) est un espace de Artin, construire la matrice de q dans une base bien choisie sachant que $\overline{\mathrm{F}} = \mathrm{E}$.

Partie III

III.A.1.a Pour la réciproque, ne pas oublier de vérifier que f est inversible. Pour la seconde partie de la question, il suffit de vérifier que $f(\mathrm{F}^\perp) \subseteq \big(f(\mathrm{F})\big)^\perp$.

III.A.2.a Une symétrie s par rapport à F et parallèlement à G est définie par $s(x) = x$ pour $x \in \mathrm{F}$ et $s(y) = -y$ pour $y \in \mathrm{G}$.

III.A.2.c Construire la matrice d'une réflexion dans une base adaptée.

III.A.2.d Pour une symétrie s de E par rapport à F et parallèlement à G, et pour $x \in \mathrm{E}$, $s(x)$ est l'unique vecteur $z \in \mathrm{E}$ vérifiant $x + z \in \mathrm{F}$ et $x - z \in \mathrm{G}$.

III.B.1 Considérer une base e de E telle que

$$\Omega = \mathrm{Mat}\,(q, e) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I}_p \\ \hline \mathrm{I}_p & 0 \end{array}\right)$$

et écrire $\mathrm{Mat}\,(f, e)$ par blocs. L'égalité matricielle de la question III.A.1.c impose des contraintes sur les blocs de $\mathrm{Mat}\,(f, e)$. Le déterminant de f apparaît en appliquant le déterminant sur l'une de ces contraintes.

III.B.2 Même raisonnement qu'à la question précédente en utilisant la décomposition de la question II.C.3.

III.B.3.a Si E est une droite, montrer que f est nécessairement l'identité. Si E est un plan, raisonner matriciellement pour obtenir des informations sur f qui aboutissent à des contradictions.

III.B.3.d Étant donné $z = f(x) - x$ pour $x \in \mathrm{E}$, montrer que $q(z) = 0$ en distinguant les deux cas $q(x) \neq 0$ et $q(x) = 0$.

III.B.3.e Montrer d'abord que $\mathrm{V} \subseteq \mathrm{U}^{\perp}$ puis raisonner avec les dimensions à l'aide de la question II.C.4 et du théorème du rang.

Partie IV

IV.A.2 Appliquer l'hypothèse de récurrence à $(\mathrm{H}, q_{|\mathrm{H}})$ où $\mathrm{H} = \{x\}^{\perp}$. Étendre ensuite les réflexions de H obtenues par l'identité sur $\mathbb{K}x$, puis vérifier que ces extensions sont bien des réflexions orthogonales.

IV.A.3 Considérer $\widetilde{f} = s \circ f$ où s est la réflexion obtenue à la question III.A.2.d.

IV.A.4 Observer tout d'abord que les autres cas correspondent à la condition de la partie III.B.3. Considérer ensuite l'isométrie négative $\widetilde{f} = s \circ f$ où s est une réflexion quelconque de E.

IV.B.1 Lire le début du corrigé de cette question en guise d'indication : trois sous-questions y sont présentées. Certaines sont utiles pour la suite.

IV.B.2.b Dans le cas $q(x + y) \neq 0$, poser $y' = -y$ pour pouvoir utiliser le résultat de la question III.A.2.d.

IV.B.3.b Voir que $\mathrm{F}_2 \subset {\mathrm{F}_1}^{\perp}$ et se rappeler du second résultat de la question III.A.1.a.

IV.B.3.c Appliquer le théorème de Witt sur les deux droites $g(\mathrm{F}_2)$ et $f(\mathrm{F}_2)$ de ${\mathrm{F}'_1}^{\perp}$.

IV.B.3.d Construire k à partir de $f_{|\mathrm{F}_1}$ et $h \circ g$.

Les conseils du jury

Le rapport du jury insiste sur le recul nécessaire pour répondre à de nombreuses questions du sujet. Il proscrit le « bachotage à court terme sur des exercices corrigés ». En outre, le sujet est extrêmement long (à la lecture du rapport, il semblerait que la partie IV n'ait pas du tout été abordée). La stratégie gagnante était d'apporter le plus grand soin aux questions plus faciles. Pour ces dernières, « bien comprises quant au fond par une large proportion de candidats, les correcteurs se sont particulièrement attachés à la qualité de la rédaction. » En particulier sur la forme, les défauts « ont été largement sanctionnés ».

Partie I

I.A.1.a La forme bilinéaire φ est linéaire à gauche et symétrique donc est linéaire à droite également. Ainsi, pour $x \in \mathrm{E}$, la fonction $h(x)$ est linéaire et à valeurs dans $\mathbb{K}$ car φ l'est.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathrm{E},\ h(x) \text{ est une forme linéaire sur E.}}$$

I.A.1.b La fonction $h : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}^*$ est linéaire lorsque l'égalité suivante entre fonctions est satisfaite :

$$\forall\,(x,x') \in \mathrm{E}^2 \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{K} \qquad h(x + \lambda\,x') = h(x) + \lambda\,h(x')$$

Vérifions-la « point-à-point » pour $(x,x') \in \mathrm{E}^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ fixés. Pour tout $y \in \mathrm{E}$,

$$\begin{aligned} h(x+\lambda\,x')(y) &= \varphi(x+\lambda\,x',y) && \text{(définition de } h\text{)}\\ &= \varphi(x,y) + \lambda\,\varphi(x',y) && (\varphi \text{ est linéaire à gauche})\\ h(x+\lambda\,x')(y) &= h(x)(y) + \lambda\,h(x')(y) && \text{(définition de } h\text{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction } h : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}^* \text{ est linéaire.}}$$

I.A.2 L'ensemble $\mathrm{A}^{\perp\varphi}$ contient 0_E car φ est linéaire à gauche (et toute application linéaire est nulle en 0). Il est stable par combinaisons linéaires pour la même raison :

$$\forall\,(x,x',\lambda,a) \in (\mathrm{A}^{\perp\varphi})^2 \times \mathbb{K} \times \mathrm{A} \qquad \varphi(x+\lambda\,x',a) = \varphi(x,a) + \lambda\,\varphi(x',a) = 0 + \lambda \times 0 = 0$$

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{A}^{\perp\varphi} \text{ est un sous-espace vectoriel de E.}}$$

I.A.3 Reformulons la définition de $\mathrm{E}^{\perp\varphi}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}^{\perp\varphi} &= \{x \in \mathrm{E} \mid \forall y \in \mathrm{E} \quad \varphi(x,y) = h(x)(y) = 0\}\\ &= \{x \in \mathrm{E} \mid h(x) = 0_{\mathrm{E}^*}\} = \mathrm{Ker}\ h \end{aligned}$$

Le noyau a un sens car h est une application linéaire (question I.A.1.b). Ainsi, $\mathrm{E}^{\perp\varphi} = \{0\}$ si et seulement si $h : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}^*$ est injective. Comme E et E^* ont même dimension, l'injectivité de h équivaut à sa bijectivité. Finalement,

$$\boxed{\varphi \text{ est non dégénérée si et seulement si } h \text{ est un isomorphisme.}}$$

I.A.4.a La i^e colonne de $\mathrm{Mat}\,(h,e,e^*)$ représente les coordonnées de $h(e_i)$ dans la base duale e^*. Rappelons que pour un vecteur $y \in \mathrm{E}$ de coordonnées $(y_1,\dots,y_n)$ dans la base e, on a ${e_i}^*(y) = y_i$.

> Cette relation est la seule chose importante à retenir sur les bases duales. Autrement dit, ${e_i}^*$ est la fonction i^e-coordonnée sur E. Ainsi, pour obtenir la décomposition dans e^* d'une forme linéaire f sur E, il suffit d'exprimer $f(y)$ en fonction des coordonnées y_i de y dans e puis de remplacer y_i par ${e_i}^*$ dans l'expression obtenue.