Mines Physique 1 PSI 2009 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Emmanuel Loyer (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Aymeric Spiga (École Polytechnique) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Ce problème, constitué de quatre parties indépendantes, est consacré à l'étude du rayonnement fossile.

- La première partie étudie l'expansion de l'Univers. Le point de départ est l'effet Doppler et le décalage vers le rouge de la lumière issue des galaxies lointaines. La plupart des questions ne font appel qu'à des notions simples et à des calculs courts ; cependant, elles peuvent déstabiliser par leur originalité.
- Le problème s'intéresse dans la deuxième partie à la thermodynamique du rayonnement fossile. Aucune notion de thermodynamique du rayonnement n'est supposée connue (conformément au programme de la filière PSI) ; là encore, c'est l'originalité des questions qui peut déstabiliser, plus que les aspects techniques.
- La troisième partie, qui décrit le positionnement de la sonde spatiale Planck, relève de la mécanique du point de première année. Sa résolution fait appel au cours relatif au mouvement keplerien et à la dynamique en référentiel non galiléen. Les calculs, plus ardus, nécessitent rigueur et méthode.
- Enfin, la quatrième partie revient sur la thermodynamique du rayonnement électromagnétique ; elle a pour but d'établir l'expression de la pression de radiation utilisée dans la deuxième partie. Elle fait appel au cours sur les ondes électromagnétiques et propose notamment l'étude de la réflexion d'une onde sur un conducteur parfait en incidence oblique. Bien que proche du cours, cette partie s'avère plutôt calculatoire.

L'ensemble constitue un problème intéressant, en lien avec des recherches très actuelles dans le domaine de la cosmologie, le tout en mobilisant des connaissances relatives au programme des deux années de prépa. En dépit de l'originalité du thème et de certaines questions, il constitue un bon sujet de révision.

Indications

Partie I

3 Commencer par exprimer $r^2(t+\mathrm{T})$, puis faire un développement limité.

4 Calculer les instants de réception de deux signaux successifs émis à t et $t+\mathrm{T}$.

9 La masse volumique ρ de l'Univers est supposée uniforme, mais variable dans le temps. Il faut raisonner sur l'expression de l'énergie mécanique faisant intervenir la masse totale de l'Univers (qui ne varie pas).

Partie II

14 Pour déterminer la densité volumique totale d'énergie, il faut intégrer la densité volumique par unité de fréquence sur la fréquence.

15 Appliquer le premier principe à l'Univers et s'inspirer de la démonstration des lois de Laplace pour le gaz parfait en évolution adiabatique quasistatique.

Partie III

18 On rappelle que la force d'inertie d'entraînement dérive de l'énergie potentielle

$$\mathrm{E_p} = -\frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,{r_\mathrm{S}}^2$$

19 Commencer par établir l'expression de la dérivée de l'énergie potentielle pour des mouvements sur l'axe $(\mathrm{S}, \widehat{e}_x)$:

$$-\frac{\mathrm{dE_p}}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathscr{G}\,\mathrm{M_S}\,m}{|x|\,x} - \frac{\mathscr{G}\,\mathrm{M_T}\,m}{|x-r|\,(x-r)} + m\,\omega^2\,x$$

Est-il nécessaire de dériver l'expression de $\mathrm{E_p}$ obtenue à la question précédente ? Montrer ensuite qu'il y a trois positions d'équilibre et qu'elles sont instables.

20 Montrer que ℓ vérifie

$$-\mathrm{M_S}\,\ell^2 - \mathrm{M_T}\,(r+\ell)^2 + \frac{\mathrm{M_S}}{r^3}\,(r+\ell)^3\,\ell^2 = 0$$

Faire apparaître la variable adimensionnée $u = r/\ell$, et prendre soin de ne conserver que les termes d'ordre le plus bas en u.

21 À partir du principe fondamental de la dynamique appliqué à la sonde, montrer que l'équation vérifiée par ε est de la forme

$$\ddot{\varepsilon} - \Omega^2\,\varepsilon = 0$$

Partie IV

23 On peut utiliser la continuité de la composante tangentielle du champ électrique.

25 Calculer d'abord le champ total complexe avant de prendre la partie réelle.

26 Montrer que $u = \varepsilon_0\,{\mathrm{E_{0i}}}^2$. On rappelle que $\left\langle \sin^2(\omega\,t+\varphi)\right\rangle = \left\langle \cos^2(\omega\,t+\varphi)\right\rangle = 1/2$.

27 Utiliser la condition de passage pour le champ magnétique et la formule du double produit vectoriel.

28 Le champ magnétique, qui intervient dans la force de Laplace, est discontinu dans le plan $x=0$. Il faut remplacer $\overrightarrow{\mathrm{B}}\,(x=0,t)$ par

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{B}}\,(x=0^-,t) + \overrightarrow{\mathrm{B}}\,(x=0^+,t)\right)$$

30 Raisonner sur la superposition de deux ondes de pulsations différentes : calculer u et p comme aux questions précédentes.

I. Expansion de l'Univers

1 Quand on observe un objet situé à une distance d, la lumière a parcouru le trajet en une durée d/c. Ainsi, si l'observation a lieu à l'instant t, la lumière a été émise à l'instant $t - d/c$. Observer à grande distance revient à observer les objets tels qu'ils étaient dans un passé lointain.

> Ceci n'a d'intérêt que pour des objets suffisamment éloignés, pour que le temps de propagation soit suffisamment grand. La lumière provenant du Soleil met ainsi un peu plus de 8 minutes pour parvenir sur la Terre ; dans le cas de Proxima du Centaure, l'étoile la plus proche du système solaire, le temps de parcours est de l'ordre de 4 ans. Pour la galaxie d'Andromède, l'une des plus proches de la Terre, ce temps de parcours est voisin de 2,5 millions d'années.

2 Compte tenu de la discussion de la question précédente, on a directement

$$\boxed{t' = t + \frac{r(t)}{c}}$$

3 Si on peut négliger les variations du vecteur vitesse entre t et $t + \mathrm{T}$, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t+\mathrm{T}) = \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) + \overrightarrow{v}(t)\,\mathrm{T}$$

qui donne $$r^2(t+\mathrm{T}) = r^2(t) + 2\,\overrightarrow{r}(t)\cdot\overrightarrow{v}(t)\,\mathrm{T} + v^2(t)\,\mathrm{T}^2$$

soit $$r(t+\mathrm{T}) = r(t)\left[1 + 2\,\frac{\overrightarrow{r}(t)\cdot\overrightarrow{v}(t)\,\mathrm{T}}{r^2(t)} + \frac{v^2(t)\,\mathrm{T}^2}{r^2(t)}\right]^{1/2}$$

Au premier ordre en $v(t)\mathrm{T}/r(t)$, il vient

$$r(t+\mathrm{T}) \simeq r(t)\left[1 + \frac{\overrightarrow{r}(t)\cdot\overrightarrow{v}(t)\,\mathrm{T}}{r^2(t)}\right]$$

d'où $$\boxed{r(t+\mathrm{T}) - r(t) \simeq v(t)\cos\alpha(t)\,\mathrm{T}}$$

4 Supposons qu'un maximum de l'onde est émis à l'instant t ; il est reçu en t', dont l'expression est fournie par un raisonnement analogue à celui de la question 2 :

$$t' = t + \frac{r(t)}{c}$$

Le maximum suivant de l'onde est émis à l'instant $t + \mathrm{T}$; il est donc reçu en

$$t'' = t + \mathrm{T} + \frac{r(t+\mathrm{T})}{c}$$

La période du signal reçu s'identifie à la durée séparant la réception de deux maxima

$$\mathrm{T}' = t'' - t' = \mathrm{T} + \frac{r(t+\mathrm{T}) - r(t)}{c}$$

Avec les approximations de la question précédente, on obtient

$$\boxed{\mathrm{T}' = \mathrm{T}\left(1 + \frac{v\cos\alpha}{c}\right)}$$

Ce phénomène, indépendant du type d'onde considéré, est connu sous le nom d'« effet Doppler ». Dans le cas des ondes sonores, comme $\mathrm{T}' > \mathrm{T}$ si $\cos\alpha > 0$, le son reçu est plus grave que le son émis si la source s'éloigne. Inversement, le son reçu est plus aigu si la source s'approche. Ce phénomène est observé couramment avec la sirène d'un véhicule de secours.

L'effet Doppler a été traité plus en détail dans le deuxième problème de physique des Concours Communs Polytechniques de la filière PSI en 2007.

5 La relation entre T' et T s'écrit en fonction de la vitesse radiale

$$\mathrm{T}' = \mathrm{T}\left(1 + \frac{v_\mathrm{r}}{c}\right)$$

Or, comme $\lambda = c\,\mathrm{T}$ et $\lambda' = c\,\mathrm{T}'$, il vient

$$\lambda' = \lambda\left(1 + \frac{v_\mathrm{r}}{c}\right)$$

soit
$$\boxed{\frac{\lambda'}{\lambda} = 1 + \mathrm{Z} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{Z} = \frac{v_\mathrm{r}}{c}}$$

6 Si M s'approche, $\cos\alpha$ est négatif ; ainsi, Z est négatif et λ' est inférieur à λ.

$$\boxed{\text{La lumière reçue est donc décalée vers le bleu.}}$$

On rappelle que le bleu correspond aux petites longueurs d'onde visibles, alors que le rouge correspond aux grandes longueurs d'onde visibles. Le terme anglais « *redshift* » se traduit justement par « décalage vers le rouge ». Pour la plupart des galaxies, Z est en effet positif.

Le jury indique que certains candidats, sans doute induits en erreur par le terme « *redshift* » ont chercher à justifier un décalage vers le rouge en contradiction avec le résultat de leur calcul.

7 Une régression linéaire effectuée à la calculatrice donne

$$\mathrm{Z} = \alpha + \beta\,d \qquad \text{avec} \qquad \alpha \simeq 1{,}16.10^{-3} \qquad \text{et} \qquad \beta \simeq 6{,}68.10^{-27}\ \mathrm{m}^{-1}$$

La coefficient de corrélation de 0,998 assure que la modélisation rend très bien compte des données expérimentales. En raison de l'ordre de grandeur de d, on peut écrire

$$\mathrm{Z} \simeq \beta\,d$$

au moins pour les galaxies les plus éloignées.

La loi de proportionnalité de Hubble ne semble pas bien vérifiée pour les galaxies les plus proches, pour lesquelles le terme d'ordonnée à l'origine dans la régression linéaire n'est pas négligeable. La loi de Hubble fait cependant l'hypothèse implicite que la valeur du décalage vers le rouge observée est entièrement due à l'expansion de l'Univers. Une telle supposition est clairement erronée dans le cas des galaxies les plus proches. En effet, leur mouvement propre par rapport à notre galaxie n'est plus négligeable par rapport à leur mouvement résultant de l'expansion de l'Univers et contribue significativement au *redshift*. Il est alors possible d'observer des valeurs de Z négatives ; c'est le cas, par exemple, de la galaxie d'Andromède ($\mathrm{Z} \simeq -1.10^{-3}$).