E3A Maths B PSI 2009 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sophie Rainero (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Juliette Brun-Leloup (Professeur en CPGE) et Nicolas Martin (ENS Lyon).

Ce sujet est composé de quatre exercices complètement indépendants, deux d'algèbre et deux d'analyse.

- Dans le premier exercice, on commence par calculer le polynôme caractéristique d'une matrice d'ordre 4 à l'aide de différentes informations, puis on se sert de ce polynôme et du théorème de Cayley-Hamilton pour calculer les puissances successives de cette matrice.
- Dans le deuxième exercice, on étudie qualitativement les solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre sous forme résolue. Plus précisément, on démontre que la seule solution de cette équation admettant une infinité de zéros sur un segment est l'application nulle.
- Le troisième exercice, le plus long, propose de démontrer la règle de Raabe-Duhamel, qui permet de déterminer la nature de certaines séries numériques. Il en donne ensuite trois applications. Les deux premières concernent des séries numériques, l'une étant définie à l'aide d'une suite d'intégrales généralisées. Dans la troisième application, on se sert de la règle de Raabe-Duhamel pour étudier la somme d'une série entière, en particulier son comportement aux bornes de l'intervalle de convergence.
- Enfin, dans le quatrième et dernier exercice, on prouve l'existence d'un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E transformant une famille $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ en une famille $(y_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$, sachant que $\langle x_i|x_j\rangle = \langle y_i|y_j\rangle$ pour tout couple (i,j) d'éléments de $[\![\,1\,;\,p\,]\!]$. Ce résultat est d'abord démontré lorsque $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ est une base de E, puis lorsque la famille $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ est libre et enfin dans le cas général.

La moitié des exercices proposés ici (le premier exercice d'analyse et le second d'algèbre) portent sur le programme de première année. Il convient donc de ne pas négliger les chapitres de MPSI ou PCSI dans vos révisions ! Chacun des exercices de cette épreuve constitue un bon sujet de révisions sur le thème concerné. Ils sont en effet très guidés et permettent de s'assurer que les théorèmes du cours sont bien assimilés.

Indications

Exercice I

I.2 On pourra faire appel à la matrice colonne dont toutes les composantes valent 1.

I.4 Définir les coefficients du polynôme $\mathrm{R}_k(\mathrm{X})$ et utiliser les racines de $\mathrm{P}_\mathrm{A}(\mathrm{X})$ pour former un système permettant de les calculer. Se rappeler que si a est racine double d'un polynôme P, alors a est encore racine de son polynôme dérivé P'.

I.5 Penser au théorème de Cayley-Hamilton et se servir du résultat de la question I.4.

Exercice II

II.1.b Appliquer le théorème de Rolle en vérifiant soigneusement ses hypothèses.

II.1.c La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente et si oui quelle est sa limite ?

II.1.d D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, combien de solutions y de (E) vérifient $y(x) = y'(x) = 0$?

II.2 Se souvenir du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice III

III.A.1 Se rappeler que deux suites équivalentes sont de même signe à partir d'un certain rang.

III.A.3.a Se servir du même résultat que dans la question III.A.1.

III.A.4 Procéder exactement comme dans la question III.A.3, en choisissant β dans $]\,\lambda\,;1\,[$.

III.A.5 Effectuer une comparaison série-intégrale pour démontrer la convergence de la série de Bertrand $\sum y_n$. Ne pas oublier de donner les développements asymptotiques de x_{n+1}/x_n et de y_{n+1}/y_n pour conclure !

III.B.2.b Effectuer une intégration par parties en se plaçant sur un segment puis passer à la limite pour établir la relation demandée.

III.B.3.b Pour obtenir l'équivalence malgré le cas douteux dans la règle de Raabe-Duhamel établie dans la partie III.A, se souvenir des valeurs possibles pour α.

III.B.3.c Démontrer la convergence normale sur $[\,-1\,;1\,]$ de la série de fonctions dont la somme est S pour prouver la continuité sur ce segment. Se servir ensuite de la continuité aux extrémités du segment.

III.B.3.d Utiliser le résultat de la question III.A.1.

III.B.3.e.ii Se servir du critère spécial des séries alternées.

III.B.3.e.iii Faire appel au critère spécial des séries alternées pour majorer uniformément les restes, afin de démontrer la convergence uniforme de la série de fonctions définissant S sur le segment $[\,0\,;1\,]$.

Exercice IV

IV.2 Remarquer que la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est alors une base de E, définir f par l'image de cette base et démontrer ensuite que f est un automorphisme orthogonal.

IV.3.b Pour les calculs des produits scalaires, distinguer plusieurs cas selon la position des indices i et j par rapport à p.

IV.3.c Choisir $q = n$ et appliquer le résultat de la question IV.2.

IV.4 Extraire de la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille libre de rang maximal et se servir de la question IV.1.

Exercice I

I.1 La matrice A est une matrice carrée d'ordre 4 et de rang 3. D'après le théorème du rang, la dimension du noyau de A est égale à 1 et en particulier elle est non nulle. Par conséquent,

$$\boxed{\text{0 est valeur propre de A.}}$$

De plus, l'espace propre associé est de dimension 1 puisque c'est le noyau de A.

I.2 Soit $\mathrm{U} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont toutes les composantes valent 1. Comme la somme des coefficients de chaque ligne de A est égale à 1,

$$\mathrm{AU} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34} \\ a_{41} + a_{42} + a_{43} + a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{U}$$

Puisque U est non nul, on en déduit que

$$\boxed{\text{1 est valeur propre de A.}}$$

> Cette question est très classique. Plus généralement, on peut démontrer de la même façon que si la somme des coefficients de chaque ligne d'une matrice réelle A d'ordre quelconque vaut S, où $\mathrm{S} \in \mathbb{R}$, alors S est une valeur propre de A. Les valeurs propres d'une matrice et de sa transposée étant égales, ce résultat reste vrai si on considère les coefficients de chaque colonne.
>
> Pour démontrer que 1 est valeur propre de A, on peut également prouver que le polynôme $\mathrm{X}-1$ divise $\mathrm{P_A(X)}$ en factorisant (partiellement) ce dernier :
>
> $$\begin{aligned} \mathrm{P_A(X)} &= \begin{vmatrix} a_{11}-\mathrm{X} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\mathrm{X} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\mathrm{X} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\mathrm{X} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}-\mathrm{X}+a_{12}+a_{13}+a_{14} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21}+a_{22}-\mathrm{X}+a_{23}+a_{24} & a_{22}-\mathrm{X} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31}+a_{32}+a_{33}-\mathrm{X}+a_{34} & a_{32} & a_{33}-\mathrm{X} & a_{34} \\ a_{41}+a_{42}+a_{43}+a_{44}-\mathrm{X} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\mathrm{X} \end{vmatrix} \end{aligned}$$
>
> En effet, la suite d'opérations élémentaires qui permet d'ajouter à la première colonne les colonnes suivantes ne change pas la valeur du déterminant. Ainsi, la somme des coefficients de chaque ligne étant égale à 1, on obtient
>
> $$\begin{aligned} \mathrm{P_A(X)} &= \begin{vmatrix} 1-\mathrm{X} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 1-\mathrm{X} & a_{22}-\mathrm{X} & a_{23} & a_{24} \\ 1-\mathrm{X} & a_{32} & a_{33}-\mathrm{X} & a_{34} \\ 1-\mathrm{X} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\mathrm{X} \end{vmatrix} \\ &= (1-\mathrm{X}) \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 1 & a_{22}-\mathrm{X} & a_{23} & a_{24} \\ 1 & a_{32} & a_{33}-\mathrm{X} & a_{34} \\ 1 & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\mathrm{X} \end{vmatrix} \end{aligned}$$