CCP Maths 2 PSI 2009 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tristan Poullaouec (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Julien Lévy (Professeur en CPGE) et Guillaume Batog (ENS Cachan).

Ce problème a pour objectif l'étude du spectre et des vecteurs propres d'endomorphismes autoadjoints dont la matrice, relativement à une base orthonormale, est à coefficients positifs ou nuls. Il est constitué de deux parties totalement indépendantes.

- Dans la première partie, qui nécessite surtout des calculs, on s'intéresse au cas d'une famille particulière de matrices symétriques. On est amené, au passage, à étudier une suite définie par une relation de récurrence double.
- La deuxième partie établit quelques propriétés générales des endomorphismes autoadjoints et de leur rayon spectral, avant de considérer à partir de la question II.3 des endomorphismes particuliers ; on étudie plus précisément les vecteurs propres associés à la plus grande valeur propre.

Pas de difficulté particulière ici : on a affaire à des notions très classiques d'algèbre linéaire et bilinéaire, les questions sont précises et détaillées, et l'énoncé fournit quelques indications aux endroits les plus délicats, ce qui permet de traiter ce sujet sans rencontrer trop de problèmes. De plus, la longueur est tout à fait raisonnable : on peut en venir à bout dans le temps imparti.

Indications

Partie I

I.1.1 Démontrer par récurrence double le résultat pressenti lors du calcul de x_2.

I.1.2 Utiliser le résultat qui précède.

I.2.1 Développer $d_3(t)$ et $d_4(t)$ selon la première colonne.

I.2.2 Généraliser la méthode employée lors du calcul de $d_3(t)$ et $d_4(t)$ pour établir la relation de récurrence. La prouver ensuite à l'aide d'une récurrence double.

I.3.1 Utiliser le résultat de la question I.2.2 et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ introduite en I.1.

I.4.3 Vérifier que pour un choix judicieux de θ, les n premiers termes de la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ étudiée à la question I.1 fournissent les composantes d'un vecteur propre satisfaisant les conditions requises.

Partie II

II.1.2 On pourra noter que $|||\delta|||$ est atteinte pour un des vecteurs de la base $\mathscr{B}$.

II.1.3 Utiliser le résultat de la question précédente.

II.2.1 D'un point de vue topologique, que dire de l'espace S ?

II.2.2 Noter que $\Phi(w) - \Phi(v) \leqslant 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Se ramener à un polynôme en t de signe constant.

II.3.2 Utiliser les résultats des questions II.2.3 et II.3.1

II.4 Faire appel aux question II.3.1 et II.2.

II.5 Poser $\mathrm{I} = \{i \in [\![1\,;n]\!] \mid |x_i| = 0\}$ et $\mathrm{J} = \{i \in [\![1\,;n]\!] \mid |x_i| > 0\}$, puis vérifier que l'on obtient une contradiction avec la condition (**2**) lorsque l'un des réels x_i est nul.

II.6 Normer le vecteur y avant d'appliquer le résultat de la question précédente. Montrer ensuite que $l(z) = \rho\, z$, mais que $z_1 = 0$.

II.7 Établir à l'aide de la question II.5 l'existence d'un vecteur $z^+ > 0$ tel que $l(z^+) = \rho\, z^+$ et noter que, si $\lambda \neq \rho$, alors $x \perp z^+$.

II.8 S'assurer que la matrice A vérifie les conditions (**1**) et (**2**). Ensuite, additionner ses colonnes et utiliser la question II.7.

Les conseils du jury

Dans son rapport, le jury souligne l'importance du soin apporté à la présentation. Notamment, il est indispensable de mettre en évidence les résultats afin de les faire ressortir. En revanche, il est totalement inutile de recopier les questions !

En ce qui concerne le contenu et la rédaction, le rapport s'achève sur quelques conseils pratiques :

- terminer les calculs et donner des résultats simplifiés au maximum ;
- donner tous les arguments permettant d'arriver à la conclusion voulue ;
- penser à utiliser les résultats fournis dans l'énoncé pour traiter les questions qui suivent ;
- bien vérifier les hypothèses des théorèmes et des questions utilisés.

Partie I

I.1.1 On sait que $x_1 = \sin(\theta)$. De plus,

$$x_2 = 2x_1 \cos(\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$$

soit

$$\boxed{x_2 = \sin(2\theta)}$$

Maintenant, montrons à l'aide d'une récurrence double que la propriété

$$\mathscr{P}(p) : \quad x_p = \sin(p\,\theta)$$

est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

- Initialisation : d'après ce qui précède, les propriétés $\mathscr{P}(1)$ et $\mathscr{P}(2)$ sont vraies.
- Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(p)$ et $\mathscr{P}(p+1)$ soient vraies, c'est-à-dire que $x_p = \sin(p\,\theta)$ et $x_{p+1} = \sin\big((p+1)\,\theta\big)$. Par définition de la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$,

$$\begin{aligned}
x_{p+2} &= 2x_{p+1}\,\cos(\theta) - x_p \\
&= 2\sin\big((p+1)\,\theta\big)\,\cos(\theta) - \sin(p\,\theta) \\
&= 2\big[\sin(p\,\theta)\,\cos(\theta) + \cos(p\,\theta)\,\sin(\theta)\big]\cos(\theta) - \sin(p\,\theta) \\
&= \sin(p\,\theta)\big[2\cos^2(\theta) - 1\big] + 2\sin(\theta)\,\cos(\theta)\,\cos(p\,\theta) \\
&= \sin(p\,\theta)\,\cos(2\theta) + \sin(2\theta)\,\cos(p\,\theta) \\
x_{p+2} &= \sin\big((p+2)\,\theta\big)
\end{aligned}$$

  ce qui montre que $\mathscr{P}(p+2)$ est vraie.

- Conclusion : on déduit alors du principe de récurrence que la propriété $\mathscr{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire que

$$\boxed{\forall\, p \in \mathbb{N}^* \qquad x_p = \sin(p\,\theta)}$$

On peut procéder différemment et déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des suites vérifiant la relation de récurrence linéaire $x_{n+2} - 2\cos(\theta)\,x_{n+1} + x_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $\theta \not\equiv 0\,[\pi]$, l'équation caractéristique associée $r^2 - 2\cos(\theta)r + 1 = 0$ admet deux racines complexes conjuguées $\mathrm{e}^{\,i\theta}$ et $\mathrm{e}^{\,-i\theta}$: on sait alors que $\mathscr{E}$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension deux engendré par les suites géométriques $\big(\mathrm{e}^{\,in\theta}\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(\mathrm{e}^{\,-in\theta}\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$. En particulier, les suites réelles appartenant à $\mathscr{E}$ ont pour expression $x_n = a\,\cos(n\theta) + b\,\sin(n\theta)$. Pour la suite considérée ici, on conclut que $a = 0$ et $b = 1$ au vu des conditions initiales, ce qui permet de retrouver le résultat précédent.

Lorsque $\theta \equiv 0\,[\pi]$, on a $x_1 = x_2 = 0$ si bien que $x_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui est encore cohérent avec le résultat obtenu ci-dessus. Attention à ne pas oublier d'étudier ce cas, aussi simple soit-il, comme l'a signalé le rapport du jury.

I.1.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a

$$x_{n+1} = 0 \Longleftrightarrow \sin\big((n+1)\,\theta\big) = 0 \Longleftrightarrow (n+1)\,\theta \equiv 0\,[\pi] \Longleftrightarrow \theta \equiv 0 \left[\frac{\pi}{n+1}\right]$$

Ainsi, $$\boxed{x_{n+1} = 0 \text{ si et seulement si } \theta \text{ est un multiple de } \frac{\pi}{n+1}.}$$

I.2.1 Utilisons la définition des réels $d_n(t)$: on obtient sans effort

$$\boxed{d_1(t) = 2t \qquad \text{et} \qquad d_2(t) = \begin{vmatrix} 2t & 1 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = 4t^2 - 1}$$

Un développement selon la première colonne nous permet ensuite de calculer

$$d_3(t) = \begin{vmatrix} 2t & 1 & 0 \\ 1 & 2t & 1 \\ 0 & 1 & 2t \end{vmatrix} = 2t \times \begin{vmatrix} 2t & 1 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = 2t\left(4t^2-1\right) - 2t$$

soit $$\boxed{d_3(t) = 2t\left(4t^2 - 2\right) = 8t^3 - 4t}$$

> On aurait aussi pu utiliser la règle de Sarrus pour calculer ce déterminant. Cependant, il est en général plus simple de commencer par des opérations sur les lignes et les colonnes pour faire apparaître des zéros, puis d'achever le calcul à l'aide d'un développement selon une ligne ou une colonne.

De même, on obtient

$$\begin{aligned} d_4(t) = \begin{vmatrix} 2t & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2t & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2t \end{vmatrix} &= 2t \times \begin{vmatrix} 2t & 1 & 0 \\ 1 & 2t & 1 \\ 0 & 1 & 2t \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2t & 1 \\ 0 & 1 & 2t \end{vmatrix} \\ &= 2t \times \begin{vmatrix} 2t & 1 & 0 \\ 1 & 2t & 1 \\ 0 & 1 & 2t \end{vmatrix} - 1 \times 1 \times \begin{vmatrix} 2t & 1 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} \end{aligned}$$

soit $$d_4(t) = 2t\,d_3(t) - d_2(t) = 16t^4 - 8t^2 - \left(4t^2 - 1\right)$$

d'où $$\boxed{d_4(t) = 16t^4 - 12t^2 + 1}$$

I.2.2 Soit $n \geqslant 3$. Procédons comme pour le calcul de $d_3(t)$ et de $d_4(t)$: un développement de $d_n(t)$ selon la première colonne nous conduit à

$$\begin{aligned} d_n(t) = \begin{vmatrix} 2t & 1 & & & \\ 1 & 2t & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2t \end{vmatrix} &= 2t \times \begin{vmatrix} 2t & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 2t \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & & \\ 1 & 2t & 1 & \\ & 1 & \ddots & 1 \\ & & 1 & 2t \end{vmatrix} \\ &= 2t\,d_{n-1}(t) - d_{n-2}(t) \end{aligned}$$

en développant le second déterminant selon la première ligne. Ainsi,

$$\boxed{\forall\, n \geqslant 3 \qquad d_n(t) = 2t\,d_{n-1}(t) - d_{n-2}(t)}$$