Mines Physique 2 MP 2009 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Clothilde Heyrendt (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Antoine Bréhier (Professeur en CPGE) et Jean-Julien Fleck (Professeur en CPGE).

Le sujet propose d'étudier des tubes à vide et des tubes à faisceaux d'électrons, éléments que l'on retrouve encore couramment dans le domaine des hautes fréquences et des fortes puissances. Il est subdivisé en deux parties :

- La première porte sur le magnétron, oscillateur hyperfréquences constitué d'un tube à vide et de deux électrodes cylindriques coaxiales. On s'intéresse au mouvement, entre ces électrodes, des électrons émis par la cathode centrale dans différentes situations selon qu'il règne, entre la cathode et l'anode, un champ magnétique constant ou non et selon qu'il y a ou non une charge d'espace.
- La seconde partie est consacrée à un dispositif amplificateur de tension hyperfréquences : le klystron à deux cavités. Son fonctionnement étant fondé sur la modulation de vitesse d'un faisceau d'électrons, c'est ce dernier qui est étudié en détail.

Ce problème, d'une difficulté raisonnable, est relativement calculatoire. Il permet de tester ses connaissances sur la mécanique du point dans le cadre de l'électrostatique et de l'électromagnétisme.

Indications

Première partie

1 Se rappeler qu'il s'agit de coordonnées cylindriques pour le calcul du laplacien.

2 On peut écrire la conservation de l'énergie mécanique ou appliquer le principe fondamental de la dynamique.

4 Remarquer la conservation de l'énergie mécanique et sa valeur particulière.

5 Chercher à exprimer $\dot{\theta}$.

6 Utiliser les questions 4 et 5 pour éliminer $\dot{\theta}$.

7 Calculer le potentiel de la distribution et montrer que sa forme n'est pas compatible avec celle trouvée à la question 1.

Deuxième partie

11 Faire attention au signe de I_0 et penser à vérifier la continuité de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ en $r = a$.

12 Appliquer le principe fondamental de la dynamique.

13 Le potentiel varie entre une valeur minimale et $\mathrm{V_A}$. Pour trouver I_2, il faut écrire $\mathrm{V_{min}} \approx \mathrm{V_A}$.

14 Vérifier la continuité du potentiel obtenu.

15 Utiliser la conservation de l'énergie mécanique et sa valeur particulière.

20 Écrire la conservation de la quantité d'électrons véhiculés.

25 Utiliser le théorème de Gauss au niveau de (D_1) et de (D_2) pour déterminer Σ_{01} et Σ_{02}.

26 Travailler sur l'hypothèse d'influence totale.

Oscillations de puissance à haute fréquence

I. Le magnétron, oscillateur hyperfréquences

I.A Le magnétron sans champ magnétique

1 D'après l'équation de Maxwell-Gauss et en l'absence de charges (espace inter-électrodes supposé vide),

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\mathrm{E}} = 0$$

Comme par ailleurs $\overrightarrow{\mathrm{E}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{V}$, on peut écrire

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{V}) = 0$$

Par invariance par rotation autour de l'axe $(\mathrm{O}z)$ et par translation parallèlement à cet axe, V ne dépend que de la variable r. Ainsi

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{V} = \frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{d}r}\,\overrightarrow{e_r}$$

soit
$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{V}) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{d}r}\right)$$

On en déduit
$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{d}r}\right) = 0$$

c'est-à-dire
$$r\,\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{d}r} = \alpha = \mathrm{C^{te}}$$

ou encore
$$\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{d}r} = \frac{\alpha}{r}$$

Au final
$$\mathrm{V}(r) = \alpha\,\ln\left(\frac{r}{a}\right) + \beta$$

où les constantes d'intégration α et β sont à déterminer en prenant en compte les conditions aux limites

$$\begin{cases} \mathrm{V}(a) = 0 \\ \mathrm{V}(b) = \mathrm{V}_0 \end{cases}$$

Par conséquent,
$$\boxed{\mathrm{V}(r) = \mathrm{V}_0\,\frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}}$$

2 Pour étudier la trajectoire des électrons, il est nécessaire de connaître les forces auxquelles ils sont soumis. La détermination du potentiel $\mathrm{V}(r)$ permet de calculer le champ $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ par la relation $\overrightarrow{\mathrm{E}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{V}$. En coordonnées cylindriques,

$$\overrightarrow{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial r}\,\overrightarrow{e_r} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta}\,\overrightarrow{e_\theta} - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\,\overrightarrow{e_z}$$

Puisque V ne dépend que de r, il reste

$$\overrightarrow{\mathrm{E}} = -\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{d}r}\,\overrightarrow{e_r}$$

soit
$$\overrightarrow{\mathrm{E}} = -\frac{\mathrm{V}_0}{r\ln(b/a)}\,\overrightarrow{e_r}$$

Ce champ est à l'origine de la force électrostatique $\overrightarrow{\mathrm{F_e}}$ qui est exercée sur l'électron. Connaissant cette force, on peut déterminer $\dot{r} = \mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ en appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'électron dans le référentiel d'étude, supposé galiléen. Dans ce référentiel, l'électron est soumis aux forces suivantes :

- la force électrostatique $\overrightarrow{\mathrm{F_e}} = -e\,\overrightarrow{\mathrm{E}}$;
- son poids $\overrightarrow{\mathrm{P}} = m\,\overrightarrow{g}$, négligeable par rapport à $\overrightarrow{\mathrm{F_e}}$.

Ainsi, on constate que la seule force s'exerçant sur un électron est radiale, et par ailleurs, la vitesse initiale de l'électron est négligeable. On en déduit que

$$\boxed{\text{La trajectoire de l'électron est radiale.}}$$

Il y a conservation de l'énergie mécanique d'un électron, dans la mesure où les forces qui s'appliquent sur ce dernier sont conservatives. En effet, la force électrostatique dérive d'une énergie potentielle dont l'expression est

$$\mathrm{E_p}(r) = -e\,\mathrm{V}(r) = -e\,\mathrm{V_0}\,\frac{\ln{(r/a)}}{\ln{(b/a)}}$$

En $r = a$ (cathode), l'énergie mécanique vaut, avec $\dot{\theta} = 0$ pour une trajectoire radiale,

$$\mathrm{E_m} = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}(a)^2 - e\,\mathrm{V_A}$$

Or, la vitesse de l'électron au niveau de la cathode est négligeable et le potentiel $\mathrm{V_A}$ est nul. On en déduit que, quel que soit r, l'énergie mécanique est nulle. En r quelconque, elle s'écrit

$$\mathrm{E_m} = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \mathrm{E_p}(r)$$

On en tire

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{-2\,\mathrm{E_p}(r)}{m}}$$

Finalement,

$$\boxed{\dot{r} = \sqrt{\frac{2\,e\,\mathrm{V_0}}{m}\,\frac{\ln{(r/a)}}{\ln{(b/a)}}}}$$

> On retrouve ce résultat en écrivant le principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe dirigé par $\overrightarrow{e_r}$, ce qui donne
>
> $$m\,\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t} = -e\,\mathrm{E}$$
>
> d'où
>
> $$m\,\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{e\,\mathrm{V_0}}{r\ln{(b/a)}}$$
>
> Comme par ailleurs, $\dot{r} = \mathrm{d}r/\mathrm{d}t$, on peut écrire $\mathrm{d}t = \mathrm{d}r/\dot{r}$ et remplacer $\mathrm{d}t$ dans l'expression ci-dessus. Il vient
>
> $$m\,\dot{r}\,\mathrm{d}\dot{r} = \frac{e\,\mathrm{V_0}}{\ln{(b/a)}}\;\frac{\mathrm{d}r}{r}$$
>
> En intégrant entre $r = a$ et r quelconque et en considérant que $\dot{r}(a) = 0$, puisque la vitesse initiale des électrons est supposée négligeable, il vient
>
> $$m\,\frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{e\,\mathrm{V_0}}{\ln{(b/a)}}\,[\ln r - \ln a]$$
>
> et l'on retrouve bien le même résultat.