Centrale Maths 1 MP 2009 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Florian Metzger (ENS Cachan) ; il a été relu par Juliette Leloup (ENS Ulm) et Guillaume Batog (ENS Cachan).

Le sujet proposé a pour but l'étude de fonctions intégrales et d'un opérateur intégral. On y démontre des résultats classiques sur les deux premières fonctions B et Γ d'Euler

$$\mathrm{B}\,(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

et sur l'opérateur d'Abel $\mathrm{A}_\alpha : f \longmapsto \left(x \mapsto x^{1-\alpha} \displaystyle\int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t \right)$.

- La première partie généralise une propriété séquentielle de la factorielle. Il s'agit d'un court préliminaire à la suite du sujet.
- La deuxième partie montre que l'intégrale d'une fonction continue intégrable et décroissante peut être vue comme la limite de la somme d'une série entière. Ce résultat permet de donner un équivalent en 1 de la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha-1}\,x^n$ en faisant intervenir la fonction Γ.
- Dans la troisième partie, on établit une formule reliant la première fonction eulérienne, B, à la deuxième, Γ, avant de démontrer la formule des compléments :

$$\forall \alpha \in \left]\,0\,;1\,\right[\qquad \Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha) = \mathrm{B}(\alpha, 1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

- Enfin, la dernière partie montre que l'opérateur d'Abel n'admet pas de valeur propre en utilisant les parties précédentes.

Le sujet est plutôt long si l'on fait le choix de rédiger proprement toutes les questions (ce qui, rappelons-le, rapporte des points !). Les questions II.A.3 et III.C.2 demandent tout particulièrement un effort de rédaction.

Il est nécessaire, pour réussir ce sujet, de bien maîtriser les résultats sur les intégrales généralisées (conditions d'existence et de continuité des intégrales à paramètre, critère de Riemann), ainsi que sur les suites et les séries de fonctions, dont on manipule des équivalents. Des théorèmes généraux d'analyse sur les fonctions lipschitziennes, continues, ou les théorèmes de Heine et de Weierstraß sont également des outils clés pour traiter ce sujet. Il constitue un bon entraînement aux concours puisqu'il permet de réviser une grande partie du programme d'analyse de prépa.

Le deuxième thème dominant du sujet est l'algèbre linéaire, employée pour étudier l'opérateur d'Abel, défini sur l'espace vectoriel de dimension infinie $\mathscr{C}^0\,([\,0\,;1\,]\,;\mathbb{C})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Remarquons enfin que les principaux résultats de ce sujet figurent au programme de première année de bien des écoles d'ingénieur dans les chapitres de mathématiques consacrés à l'intégration de Lebesgue et à l'analyse complexe.

Indications

I.1 Calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$ puis penser au théorème de Rolle.

I.2 Que dire de l'intégrande de Γ'' ?

I.3 Utiliser la question I.2 pour se ramener à étudier $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma^n/\Gamma(n)$.

II.A.2.a Utiliser la décroissance de ϕ sur l'intervalle $[\,t_0\,;+\infty\,[$ pour exhiber l'entier n satisfaisant.

II.A.3 Raisonner de même qu'en II.A.2.a pour trouver un réel a convenable. Commencer par étudier le reste de la somme à l'aide d'une comparaison série-intégrale. Pour le premier terme, remarquer que la fonction ϕ est continue sur le compact $[\,0\,;t_0\,]$.

II.B.1 Il y a une erreur d'énoncé : il faut considérer $\alpha \geqslant 1$, sinon la fonction g_α n'est pas continue en 0. Utiliser la question II.A.3.

II.B.2.b Utiliser l'équivalent $\ln x \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\sim} (x-1)$, après avoir explicité $g_\alpha(-n\ln x)$.

III.B.2.b Remarquer que $u_n\,(\alpha,\beta)$ est une somme de Riemann. Écrire ensuite la différence $u_n(\alpha,\beta) - \mathrm{B}(\alpha,\beta)$ comme une somme d'intégrales et utiliser le caractère lipschitzien de $\psi_{\alpha,\beta}$.

III.B.2.c Comment multiplie-t-on deux séries entières ? Pour la dernière question, établir de deux façons différentes la limite en 1 par valeurs strictement inférieures du quotient $\mathrm{S}_\alpha\mathrm{S}_\beta/\mathrm{S}_{\alpha+\beta}$.

III.C.1 Utiliser une majoration sur tout compact inclus dans $]\,0\,;1\,[$ pour vérifier les hypothèses du théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.

III.C.2.b Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{\mathrm{X}^{2p}}{\mathrm{X}^{2q}+1}$ en éléments simples.

III.C.3 Montrer que l'ensemble des quotients de type $\dfrac{2p+1}{2q}$, où $0 < p < q$ sont deux entiers naturels, est dense dans $]\,0\,;1\,[$.

IV.A.1 Si $x > 0$, alors la fonction $t \mapsto f(t)(x-t)^{-\alpha}$ est continue sur $[\,0\,;x\,[$.

IV.A.2.b Pour vérifier le théorème de continuité des intégrales à paramètre, utiliser le fait que la fonction f est continue sur le *compact* $[\,0\,;1\,]$.

IV.A.2.c Utiliser la fonction constante égale à 1 pour obtenir une inégalité sur $|||\mathrm{A}_\alpha|||$.

IV.B.1.a Faire une démonstration par récurrence sur n et utiliser l'expression intégrale de $\mathrm{A}_\alpha g$ pour une fonction $g \in \mathrm{E}$ bien choisie.

IV.B.3.a Étudier le comportement à l'infini de $\|2^n\,\lambda^n {\mathrm{A}_\alpha}^n f\|$ pour montrer que la série de fonctions proposée converge normalement.

IV.B.3.b Utiliser la continuité de A_α pour effectuer un passage à la limite dans une suite de fonctions appropriée.

IV.B.3.c Montrer que l'opérateur $\mathrm{id}_{\,\mathrm{E}} - \lambda\mathrm{A}_\alpha$ est injectif et conclure avec l'existence d'un inverse à droite.

IV.C.1.b Utiliser la formule des compléments et le résultat de la question III.B.2.c.

IV.C.2 Remarquer que P et $\mathrm{A}_{1-\alpha} \circ \mathrm{A}_\alpha$ sont des opérateurs linéaires.

IV.C.3.b Utiliser le théorème de Weierstraß sur la densité des polynômes dans E après avoir expliqué pourquoi il s'applique à une fonction de E.

IV.C.3.c $\mathrm{P}f$ est une primitive d'une fonction continue.

IV.C.3.d La question IV.C.3.c montre que A_α possède un inverse à gauche.

Les conseils du jury

La conclusion du rapport du jury regorge d'informations : « les candidats doivent s'attacher à présenter des copies lisibles, rédigées de façon claire et précise et de donner des démonstrations en alignant des égalités que l'on agrémente de « bulles » explicatives. Ils doivent respecter l'orthographe [...] Ils ne doivent pas oublier que si ces divers aspects ne font pas l'objet de points spécifiques dans le barème, ils peuvent entraîner des points de minoration pour les copies ne présentant pas ces qualités. »

En outre, il est préférable d'adopter une stratégie qui met davantage en avant les capacités de compréhension, de réflexion et de progression dans une épreuve, et non de résolution ponctuelle de questions plus basiques. À ce propos, le rapport du jury mentionne la tentative de « quelques candidats d'essayer de glaner des points en abordant quelques questions [de la partie IV], au détriment des parties précédentes. Malheureusement, ils n'ont pas toujours été récompensés... »

I. Questions préliminaires

I.1 Grâce à la formule fournie dans les rappels du sujet, on sait que

$$\Gamma(2) = 1 \times \Gamma(1) = \Gamma(1)$$

La fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[\,1\,;2\,]$, elle est donc continue sur ce même intervalle et dérivable sur l'intervalle $]\,1\,;2\,[$. Le théorème de Rolle permet alors de conclure que

$$\boxed{\text{Il existe un réel } c \text{ dans l'intervalle }]\,1\,;2\,[\text{ tel que } \Gamma'(c) = 0.}$$

Attention à ne pas démontrer de résultat inutile comme le souligne le rapport du jury : « un assez grand nombre d'étudiants de lit pas – ou ne sait pas lire – attentivement l'énoncé ; comment peut-on, par exemple, expliquer le calcul de $\Gamma(2)$ – alors que la valeur figure dans l'énoncé – ou l'étude de la continuité et de la dérivabilité de la fonction Γ ? »

I.2 Pour tout $x > 0$, l'intégrale

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 \, \mathrm{e}^{-t} \, t^{x-1} \, \mathrm{d}t$$

possède une intégrande positive pour tout $t > 0$ et non constamment nulle, donc pour tout $x > 0$, $\Gamma''(x) > 0$. On en déduit que Γ' est une fonction strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Comme de plus, grâce à la question I.1, $\Gamma'(c) = 0$, on obtient que pour tout $x > c$, $\Gamma'(x) > 0$. Enfin, comme on a établi $c < 2$, on en déduit que pour tout $x \geqslant 2$, $\Gamma'(x) > 0$, ce qui permet de conclure que

$$\boxed{\text{La fonction } \Gamma \text{ est strictement croissante sur l'intervalle } [\,2\,;+\infty\,[.}$$

I.3 Comme Γ ne s'annule pas pour $x \geqslant 2$, on a

$$\gamma^x = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\big(\Gamma(x)\big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\gamma^x}{\Gamma(x)} = 0$$

> On tient désormais pour acquis le fait que
>
> $$\forall x > 0 \qquad \Gamma(x) > 0$$
>
> En effet, Γ est l'intégrale d'une fonction positive non constamment nulle sur un intervalle non réduit à un point, c'est donc une fonction à valeurs strictement positives.

Par ailleurs, Γ est strictement croissante au voisinage de l'infini. Elle admet donc une limite. Celle-ci est donnée par $\Gamma(x_n)$ pour toute suite (x_n) tendant vers l'infini. En particulier,

$$\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \Gamma(n+1) = \lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$$

On distingue alors deux cas :

- Si $\gamma \leqslant 1$, alors la fonction $x \mapsto \gamma^x$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$, et il vient

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\gamma^x}{\Gamma(x)} = 0$$

- Si $\gamma > 1$, en écrivant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lfloor x \rfloor + 1$, il vient par croissance des fonctions Γ et $x \mapsto \gamma^x$ (car $\gamma > 1$)

$$\forall x \geqslant 2 \qquad \gamma^x \leqslant \gamma^{\lfloor x \rfloor + 1} \qquad \text{et} \qquad \Gamma(x) \geqslant \Gamma\left(\lfloor x \rfloor\right)$$

Cela fournit $$\forall x \geqslant 2 \qquad 0 < \frac{\gamma^x}{\Gamma(x)} \leqslant \frac{\gamma^{\lfloor x \rfloor + 1}}{\Gamma\left(\lfloor x \rfloor\right)}$$

Or, $\Gamma\left(\lfloor x \rfloor\right) = (\lfloor x \rfloor - 1)!$, donc par croissances comparées il vient,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\gamma^x}{\Gamma(x)} = 0$$

Ainsi, $$\boxed{\forall \gamma > 0 \qquad \gamma^x = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\big(\Gamma(x)\big)}$$

> Le résultat obtenu n'a rien d'étonnant. En effet, il est déjà connu quand on se restreint à une limite pour $x \in \mathbb{N}$, la factorielle l'emportant sur toute puissance d'un réel. Comme la fonction Γ d'Euler généralise la factorielle aux nombres réels, la comparaison obtenue est naturelle au sens où elle englobe la comparaison séquentielle.
>
> Par définition, et comme $\gamma > 0$,
>
> $$\frac{\Gamma(x)}{\gamma^x} = \gamma^{-1} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{x-1} \mathrm{d}t$$
>
> Après le changement de variable $u = \dfrac{t}{\gamma}$, l'égalité devient
>
> $$\frac{\Gamma(x)}{\gamma^x} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u\gamma}\, u^{x-1}\, \mathrm{d}u$$
>
> La question fournit donc la limite en $+\infty$ de l'intégrale ci-dessus, à $\gamma > 0$ fixé.