CCP Physique 1 PSI 2008 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Stanislas Antczak (Professeur agrégé) ; il a été relu par Olivier Frantz (Professeur agrégé) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Ce sujet comporte deux problèmes indépendants.

- La première partie, intitulée « L'entropie dans le système respiratoire », traite d'écoulements de fluides visqueux dans des conduites cylindriques. Malgré son nom, elle contient assez peu de thermodynamique. Dans un premier temps, il s'agit de résoudre l'équation de Navier-Stokes pour un écoulement dans un cylindre afin de déterminer le champ des vitesses. Ensuite, l'énoncé conduit à retrouver ce résultat à l'aide d'un bilan. S'ensuivent des considérations sur la résistance hydraulique, avec des analogies électriques. Enfin, tout ceci est appliqué à l'écoulement de l'air dans les voies respiratoires, à l'aide d'une modélisation originale de l'arbre bronchique.
- La deuxième partie, nommée « Effet de peau dans divers domaines », contient, outre un ensemble de questions préliminaires générales, trois sous-parties quasiment indépendantes les unes des autres, étudiant l'effet de peau et ses conséquences dans le domaine de l'électromagnétisme (effet de peau pour la conduction à la surface des conducteurs), de la thermodynamique (équation de la chaleur pour les ondes thermiques) et de la mécanique des fluides (onde de cisaillement dans un fluide visqueux). À chaque fois, il faut mettre le problème en équation, résoudre l'équation en s'inspirant éventuellement des questions préliminaires et discuter de la forme du résultat et de ses implications physiques éventuelles.

Ce sujet ne comporte pas de difficultés conceptuelles majeures ; le cheminement est très guidé par un enchaînement de questions souvent proches du cours. En outre, beaucoup de sous-parties peuvent être traitées indépendamment du reste, ce qui permet de faire une grosse portion du sujet même si on reste bloqué sur certains points. Néanmoins, il importe de rester toujours rigoureux dans la rédaction, la correction étant d'autant plus intransigeante que les questions sont élémentaires.

En outre, le rapport du jury mentionne que la présentation et l'orthographe ont été évaluées et, pour 10% des copies, cette évaluation a conduit à une baisse de la note. Il importe, pour éviter cela, de prendre le temps de relire sa copie.

Indications

Problème A

A.4 Réécrire l'équation de Navier-Stokes à l'aide de l'opérateur $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}$.

A.6 Le fait que la vitesse est bornée en $r = 0$ donne une constante d'intégration.

A.8 En régime permanent, que vaut la somme des forces s'exerçant sur le cylindre considéré ? Noter que μ, qui n'est défini nulle part dans l'énoncé, n'intervient pas dans l'expression demandée.

A.9 La vitesse moyenne est la vitesse uniforme donnant le même débit que l'écoulement considéré. Attention, elle dépend aussi de R.

A.12 Exprimer le nombre de Reynolds de l'écoulement.

A.13.a Remarquer que $\mathrm{P}_0 - \mathrm{P}_2 = (\mathrm{P}_0 - \mathrm{P}_1) + (\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2)$.

A.14 Faire l'analogie avec deux conducteurs ohmiques en parallèle.

A.19 Utiliser le résultat de la question A.10. Il s'agit d'une association en parallèle pour une génération donnée, en série entre deux générations successives.

Problème B

B.1 Utiliser la loi de Fourier pour λ, la relation $\Delta \mathrm{U} = m\, c\, \Delta \mathrm{T}$ pour c et l'expression de la force visqueuse pour η.

B.7 Le courant de déplacement est $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t}$. En régime sinusoïdal et en notation complexe, que vaut son module ?

B.8 Utiliser les équations de Maxwell-Ampère, de Maxwell-Faraday, de Maxwell-Gauss et la loi d'Ohm.

B.11 Dans le tracé, exagérer la valeur de δ pour faire apparaître clairement la tangente.

B.13 Une conductance électrique est l'inverse d'une résistance électrique.

B.14 Les conductances de conducteurs ohmiques montés en parallèle s'ajoutent.

B.17 Considérer l'alternance jour-nuit et l'alternance des saisons.

B.19 L'amplitude des oscillations de la température peut-elle augmenter lorsque la profondeur augmente ?

B.23 Simplifier l'équation de Navier-Stokes et étudier ses projections. La pression ne dépend pas de z car on a négligé les effets de la pesanteur.

B.24 On obtient une onde atténuée.

Problème A. L'entropie dans le système respiratoire

Étude d'un écoulement dans un tuyau cylindrique
Étude locale

A.1 La géométrie du problème étant invariante par rotation autour de l'axe (Oz), le champ des vitesses est indépendant de θ. On écrit par conséquent

$$\boxed{\overrightarrow{v} = v(r,\, z,\, t)\, \overrightarrow{e_z}}$$

A.2 L'équation locale de conservation de la matière s'écrit, dans le cas général,

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\, \overrightarrow{v}\,) = 0}$$

Lorsque le fluide est incompressible, la masse volumique est uniforme et constante, donc $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ et $\mathrm{div}\,(\rho\, \overrightarrow{v}\,) = \rho\ \mathrm{div}\ \overrightarrow{v}$. L'équation locale de conservation de la matière s'écrit alors

$$\boxed{\mathrm{div}\ \overrightarrow{v} = 0}$$

Le champ des vitesses, qui s'écrit $\overrightarrow{v} = v(r,\, z,\, t)\, \overrightarrow{e_z}$, vérifie ici $\mathrm{div}\ \overrightarrow{v} = 0$, ce qui donne simplement $\dfrac{\partial v}{\partial z} = 0$ puisque $\overrightarrow{v}$ est colinéaire à $\overrightarrow{e_z}$: on en conclut que v ne dépend pas de z. Par conséquent,

$$\boxed{\overrightarrow{v} = v(r,\, t)\, \overrightarrow{e_z}}$$

A.3 Dans le cas d'un écoulement stationnaire, le champ de vitesses est indépendant du temps et alors

$$\boxed{\overrightarrow{v} = v(r)\, \overrightarrow{e_z}}$$

A.4 L'équation de Navier-Stokes s'écrit, dans le cas général,

$$\rho \left(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,)\, \overrightarrow{v} \right) = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{P} + \eta\, \Delta \overrightarrow{v}$$

Ici, on a vu que $\overrightarrow{v}$ est indépendant du temps, soit $\dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$, d'une part. D'autre part, comme $\overrightarrow{v} = v(r)\, \overrightarrow{e_z}$, l'opérateur $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}$ s'écrit ici simplement $v(r)\, \dfrac{\partial}{\partial z}$. Appliqué à $v(r)\, \overrightarrow{e_z}$, cela donne un terme nul. Le premier membre de l'égalité est donc identiquement nul.

> L'énoncé ne donne pas l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques. On est donc conduit ici à revenir à l'expression du terme convectif en $(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,)$ plutôt que d'utiliser l'expression de l'équation de Navier-Stokes fournie. Le rapport du jury signale que les correcteurs ont tenu compte de cette petite difficulté introduite par la formulation de l'énoncé. Néanmoins, il ne fallait pas écrire que les termes $\dfrac{1}{2}\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ v^2$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v}$ s'annulent séparément, car c'est faux : seule leur somme est nulle.

L'équation de Navier-Stokes donne alors ici

$$-\overrightarrow{\text{grad}}\ \text{P} + \eta\,\Delta\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

En écrivant que $\Delta\overrightarrow{v} = \Delta\,(v(r))\ \overrightarrow{e_z}$, on obtient ainsi, compte tenu de l'expression du laplacien donnée dans l'énoncé, l'égalité suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ \text{P} = \eta\,\frac{1}{r}\,\frac{\text{d}}{\text{d}r}\left(r\,\frac{\text{d}v}{\text{d}r}\right)\ \overrightarrow{e_z}$$

> Il n'est pas évident du tout que $\Delta\overrightarrow{v} = \Delta\,(v(r))\ \overrightarrow{e_z}$. C'est correct dans la situation étudiée où $\overrightarrow{v} = v(r)\,\overrightarrow{e_z}$, mais il ne faut pas conclure hâtivement que, pour un vecteur $\overrightarrow{\text{F}}$ quelconque de coordonnées cylindriques $(\text{F}_r,\ \text{F}_\theta,\ \text{F}_z)$, on a $\Delta\overrightarrow{\text{F}} = \Delta\text{F}_r\,\overrightarrow{e_r} + \Delta\text{F}_\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + \Delta\text{F}_z\,\overrightarrow{e_z}$, en s'inspirant de l'expression du laplacien vectoriel en coordonnées cartésiennes. En règle générale, le laplacien vectoriel se calcule par $\Delta\,\overrightarrow{\text{F}} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ \overrightarrow{\text{F}} - \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{F}}$.

En projection sur les vecteurs transversaux à l'écoulement, il vient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \text{P}}{\partial r} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \text{P}}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

On en conclut donc que P ne dépend que de z. On obtient finalement, en projection sur l'axe (Oz),

$$\boxed{\frac{\text{dP}}{\text{d}z} = \eta\,\frac{1}{r}\,\frac{\text{d}}{\text{d}r}\left(r\,\frac{\text{d}v}{\text{d}r}\right)}$$

A.5 Le deuxième membre de l'égalité obtenue à la question précédente est indépendant de z. L'équation différentielle peut alors s'écrire $\dfrac{\text{dP}}{\text{d}z} = a$, où a est indépendante de z. Cela s'intègre en $\text{P}(z) = a\,z + b$, où b est une autre constante. Pour déterminer a et b, on utilise les conditions aux limites $\text{P}(0) = \text{P}_0$ et $\text{P}(\text{L}) = \text{P}_\text{L}$. On obtient $b = \text{P}_0$ et $a = (\text{P}_\text{L} - \text{P}_0)/\text{L}$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{P}(z) = \text{P}_0 + \frac{\text{P}_\text{L} - \text{P}_0}{\text{L}}\,z}$$

A.6 En reprenant l'équation différentielle obtenue à la question A.4 et l'expression de la pression obtenue à la question A.5, on obtient

$$\frac{\text{P}_\text{L} - \text{P}_0}{\text{L}} = \eta\,\frac{1}{r}\,\frac{\text{d}}{\text{d}r}\left(r\,\frac{\text{d}v}{\text{d}r}\right)$$

En intégrant une première fois, il vient

$$r\,\frac{\text{d}v}{\text{d}r} = \frac{\text{P}_\text{L} - \text{P}_0}{2\,\eta\,\text{L}}\,r^2 + c$$

ou encore
$$\frac{\text{d}v}{\text{d}r} = \frac{\text{P}_\text{L} - \text{P}_0}{2\,\eta\,\text{L}}\,r + \frac{c}{r}$$