E3A Maths A PSI 2008 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Céline Chevalier (ENS Cachan) ; il a été relu par Gilbert Monna (Professeur en CPGE) et Guillaume Batog (ENS Cachan).

Ce sujet traite presque exclusivement de séries numériques et de séries entières, et tourne autour de la notion de convergence sur le cercle de convergence. Il fait intervenir les théorèmes importants du cours, et demande de savoir manier les inégalités proprement. Il est composé de deux questions de cours et quelques préliminaires suivis de trois parties liées.

- Les questions de cours rappellent des résultats usuels sur les séries numériques.
- Les préliminaires redémontrent les propriétés des suites de Césaro.
- La partie I exhibe une condition suffisante pour qu'une série entière convergeant absolument sur son disque ouvert de convergence et admettant une limite au bord soit prolongeable par continuité sur le cercle de convergence.
- Dans la deuxième partie, on résout partiellement une équation différentielle en cherchant une solution sous la forme d'une série entière, et l'on montre que cette dernière vérifie les hypothèses de la partie précédente.
- Enfin, la partie III conclut sur la convergence de séries entières sur leur cercle de convergence en utilisant les résultats de la partie I.

Ce problème constitue un bon exercice de révision des séries entières et met en évidence des différences de comportement sur le bord de leur disque de convergence. Hormis dans la partie III, il ne présente pas de réelle difficulté mais demande de bien maîtriser le cours. Le rapport du jury pointe du doigt dans les mauvaises copies « une suite informe de raisonnements faux et de calculs incorrects parfois contradictoires », ainsi qu'« une très mauvaise gestion des inégalités en général ».

Indications

Questions de cours

1 Pour la troisième proposition, prendre garde au fait que les suites ne sont pas nécessairement de signe constant.

2 Utiliser le critère des séries alternées.

Préliminaires

1.2 Utiliser la décomposition de T_n en les deux sommes données par l'énoncé, puis montrer la convergence de (T_n) en utilisant des ε.

3.1 Calculer la somme
$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,k\theta}$$

Partie I

I.1 Une suite convergente est bornée.

I.2 Étudier la convergence de la série entière de terme général K/n.

I.4.1 L'ensemble $\{|ka_k| \mid k \geqslant n\}$ est inclus dans $\mathbb{R}$, non vide et majoré.

I.4.2 La suite (M_n) est décroissante. Utiliser ensuite $i)$ pour trouver sa limite.

I.5 Partir de l'expression déterminée à la question I.3 et utiliser l'inégalité
$$\forall k \geqslant n \qquad \left|a_k x^k\right| \leqslant \mathrm{M}_n/nx^k$$

I.6 Afin de montrer que chacun des termes du membre de droite de l'inégalité précédente converge vers 0, utiliser successivement l'hypothèse $ii)$, les préliminaires et la question I.4.2.

Partie II

II.2 Utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz.

II.4 Chercher une solution sous la forme $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et exploiter l'équation (E).

II.5.2 L'expression $h(u)$ fait intervenir les termes impairs d'une série facile à calculer.

II.5.5 Simplifier au maximum l'expression de $\varphi(x)$ et remarquer que la limite du produit $(1-\sqrt{x})\ln(1-\sqrt{x})$ vaut 0 par croissances comparées.

II.7 Utiliser le résultat de la question II.5.1.

Partie III

III.1 La question II.3 donne un contre-exemple.

III.2 Borner la suite des sommes partielles afin d'établir que la série $\sum c_n$ converge. Montrer ensuite que la série de fonctions de terme général $x \mapsto c_n x^n$ converge normalement sur $[\,0\,;1\,]$: la fonction associée est donc continue.

III.3 Exploiter les résultats de la partie II (en particulier la question II.6).

Questions de cours

1 La première proposition est **fausse** : il suffit de considérer la suite (u_n) définie par $u_n = 1/(n+1)$. Elle converge bien vers 0, alors que la série associée est la série harmonique, qui diverge.

La deuxième assertion est **correcte**. Supposons que la série $\sum u_n$ converge et notons (S_n) la suite de ses sommes partielles : $\mathrm{S}_n = u_0 + \cdots + u_n$. Alors, par définition, la suite (S_n) converge vers une limite finie ℓ. Or, $u_n = \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1}$, donc (u_n) converge vers $\ell - \ell = 0$.

La troisième proposition est **fausse**. En effet, posons $u_n = (-1)^n/\sqrt{n+1}$ et $v_n = (-1)^n/\sqrt{n+1} + 1/(n+1)$. Ces deux suites sont équivalentes puisque leur différence $1/(n+1)$ est négligeable devant $1/\sqrt{n+1}$. En outre, la suite (u_n) est alternée et son module tend en décroissant vers 0 : la série de terme général u_n vérifie donc le critère des séries alternées. Par suite, elle converge. Comme la série harmonique diverge, la série de terme général v_n diverge aussi.

> Ce qui est trompeur, c'est que l'affirmation est vraie si les suites sont de signe constant. C'est ce résultat qui guide le choix d'un contre-exemple : on le cherche donc parmi les suites dont le signe change, et les plus connues sont celles faisant intervenir un $(-1)^n$.
>
> Le rapport du jury signale des « choses bizarres sur les équivalents » avec des copies assurant que « $1/n$ et $(-1)^n/n$ sont équivalents mais une série converge et l'autre diverge » (l'équivalence est fausse).
>
> Remarquons enfin qu'on aurait pu montrer que (u_n) et (v_n) sont équivalentes en calculant la limite de (v_n/u_n) (puisque (u_n) ne s'annule pas) et en montrant qu'elle vaut 1.

Enfin, le dernier énoncé est **faux**. Posons à nouveau $u_n = (-1)^n/\sqrt{n+1}$. On vient de voir que la série de terme général u_n converge. En revanche, la série de terme général $|u_n|$ est une série de Riemann, qui diverge car $1/2 < 1$.

$$\boxed{\text{Les propositions 1, 3 et 4 sont fausses, et 2 est vraie.}}$$

2 Posons $u_n = (-1)^n \ln(n)/n$: comme $\ln(n)/n > 0$ pour $n \geqslant 2$, $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est bien alternée et elle tend vers 0. Il reste à montrer que $(|u_n|)$ est décroissante pour utiliser le critère des séries alternées. Posons pour cela $f(x) = \ln(x)/x$ pour $x \in [\,2\,;+\infty\,[$. f est dérivable sur cet intervalle et

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Si $x \geqslant 3$, $\ln x > 1$, donc $f'(x) < 0$. On en déduit que f est décroissante sur $[\,3\,;+\infty\,[$, puis que $(|u_n|)_{n\geqslant 3}$ est décroissante. Par suite, la série $\sum\limits_{n\geqslant 3} u_n$ converge. Comme elle ne diffère de la série étudiée que du terme constant u_2,

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \frac{\ln n}{n} \text{ converge.}}$$

> On peut étudier une série en lui retirant quelques-uns de ses premiers termes. Ici, il faut considérer $n \geqslant 3$ pour vérifier les hypothèses du critère des séries alternées (c'est-à-dire pour que le signe de la dérivée concernée soit constant).

Préliminaires

1.1 D'après l'inégalité triangulaire,

$$\left|\sum_{k=\mathrm{N}+1}^{n} t_k\right| \leqslant \sum_{k=\mathrm{N}+1}^{n} |t_k|$$

En outre, comme pour tout $k \geqslant \mathrm{N}$, $|t_k| \leqslant \varepsilon$, on en déduit

$$\sum_{k=\mathrm{N}+1}^{n} |t_k| \leqslant \sum_{k=\mathrm{N}+1}^{n} \varepsilon = (n-(\mathrm{N}+1)+1)\varepsilon = (n-\mathrm{N})\varepsilon$$

d'où

$$\boxed{\left|\sum_{k=\mathrm{N}+1}^{n} t_k\right| \leqslant n\varepsilon}$$

1.2 Soient $\varepsilon > 0$ et N l'entier défini précédemment. Décomposons la somme T_n et majorons sa valeur absolue :

$$\begin{aligned}
|\mathrm{T}_n| &= \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} t_k + \sum_{k=\mathrm{N}+1}^{n} t_k\right| \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} t_k\right| + \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=\mathrm{N}+1}^{n} t_k\right| \\
|\mathrm{T}_n| &\leqslant \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} t_k\right| + \frac{n}{n+1}\varepsilon
\end{aligned}$$

le dernier résultat provenant de la question précédente. Posons

$$\mathrm{A_N} = \left|\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} t_k\right|$$

C'est une constante qui ne dépend que de N. Comme la suite $\big(1/(n+1)\big)$ converge vers 0, il existe un entier N' tel que pour $n \geqslant \mathrm{N}'$, $1/(n+1) \leqslant \varepsilon/\mathrm{A_N}$. En outre, $n/(n+1) \leqslant 1$. En posant $n_0 = \max(\mathrm{N},\mathrm{N}')$, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$|\mathrm{T}_n| \leqslant 2\varepsilon$$

Comme ε est quelconque, 2ε l'est aussi. Finalement,

$$\boxed{\text{La suite } (\mathrm{T}_n) \text{ converge vers } 0.}$$

Il est faux de dire que « la suite $(n\varepsilon/(n+1))$ converge vers 0 ». Il faut soit raisonner avec des limites, soit avec des ε, mais pas mélanger les deux. Le rapport du jury de cette épreuve signale à ce sujet que « la gestion des ε est souvent maladroite ou très incorrecte ».

2 Définissons la suite (v_n) par $v_n = t_n - \mathrm{T}$. Alors

$$\mathrm{V}_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(t_k - \mathrm{T}) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} t_k - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{T} = \mathrm{T}_n - \mathrm{T}$$

Par définition, la suite (v_n) tend vers 0, donc la question précédente assure que la suite (V_n) tend vers 0. Le calcul ci-dessus montre alors que (T_n) converge vers T. Finalement,

$$\boxed{\text{Si la suite } (t_n) \text{ converge vers T, la suite } (\mathrm{T}_n) \text{ converge aussi vers T.}}$$