Centrale Maths 1 PSI 2008 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Frédérique Charles (ENS Cachan) ; il a été relu par Laetitia Borel-Mathurin (ENS Cachan) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Ce problème est consacré à l'étude de plusieurs relations de récurrence, grâce notamment à l'utilisation de séries entières. Il est composé d'une question préliminaire et de trois parties indépendantes (seule la question III.D propose de revenir sur un résultat obtenu dans une partie précédente).

- La question préliminaire propose de déterminer le résultat d'un algorithme qui sera utile par la suite.
- La première partie s'intéresse à une suite récurrente arithmético-géométrique, à partir de laquelle on définit la série ordinaire, puis la série exponentielle, associées à cette suite. L'étude de ces séries entières permet de retrouver l'expression de la suite.
- La deuxième étudie deux suites vérifiant cette fois une relation de récurrence matricielle. On détermine les expressions des séries ordinaires associées à ces suites après avoir établi qu'elles vérifient un système d'équations ordinaires. On calcule ensuite les expressions des séries exponentielles qui sont solutions d'un système d'équations différentielles.
- La troisième aborde ce que l'on appelle la transformée de Laplace d'une fonction, qui est définie à l'aide d'une intégrale convergente. Celle-ci permet de retrouver l'expression de la série exponentielle obtenue dans la première partie.
- Enfin, la quatrième partie reprend l'étude de deux séries exponentielles associées à un système de suites récurrentes à coefficients non constants.

Le problème ne présente pas de grosses difficultés (excepté les questions IV.B.1 et IV.B.2, plus délicates) et n'est pas excessivement calculatoire. Les parties I, II et IV constituent un bon sujet de révision des séries entières, et la partie III permet de se familiariser avec un outil classique, la transformée de Laplace. Ce problème est donc un bon galop d'essai pour réviser les techniques importantes de l'analyse. Par ailleurs, nous conseillons au lecteur de consacrer un peu de temps aux séquences d'instructions en Maple ou Mathematica qui sont demandées, cet aspect du programme étant souvent négligé par les candidats.

Indications

0 Déterminer $f(a,0)$, $f(a,1)$ et $f(a,2)$, puis raisonner par récurrence.

I.D Remarquer que la série $\mathrm{S}(z)$ est somme de deux séries entières géométriques.

I.E Décomposer la série en trois morceaux, et faire un changement d'indice dans l'un de ces termes.

I.F Penser à la règle de d'Alembert et utiliser la question I.D.

II.A Utiliser les équations vérifiées par λ et μ pour exprimer c et d en fonction de a, b, λ et μ. Déterminer ensuite la matrice de passage de la base canonique à la base de diagonalisation en fonction de a, b, μ et λ.

II.B Le principe est le même que dans la question I.E mais on obtient cette fois un système. Pour quels complexes z les fractions rationnelles obtenues existent-elles ? Que peut-on alors en déduire sur le rayon de convergence ?

II.C Utiliser le fait que les séries $\sum u_n z^n$ et $\sum v_n z^n$ ont par hypothèse un rayon de convergence non nul.

II.E Dériver l'équation différentielle vérifiée par G, puis utiliser les deux équations différentielles obtenues à la question II.C pour remplacer H' puis H par des expressions faisant intervenir G et G'. Enfin, se rappeler que l'on peut exprimer le déterminant et la trace de la matrice M en fonction de ses coefficients a, b, c, d ou de ses valeurs propres λ et μ.

III.B Intégrer par parties.

III.C Attention, l'énoncé a ici oublié une condition supplémentaire que doit vérifier le complexe p pour obtenir l'expression reliant $\mathrm{Lap}(\mathrm{G})(p)$ avec la série S.

III.D Utiliser la question III.B et déterminer la transformée de Laplace de la fonction $z \mapsto \mathrm{e}^z$.

IV.A.1 Se rappeler que le carré d'une somme ou d'une différence de nombres réels est toujours positif !

IV.A.2 Exprimer $\omega(n+1)$ et développer cette expression.

IV.B.1 Montrer que $\rho_\mathrm{S} \leqslant \rho_\mathrm{T}$ puis que $\rho_\mathrm{T} \leqslant \rho_\mathrm{S}$. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum \omega(n) z^n$ et en déduire que $\rho_\mathrm{S} = \rho_\mathrm{T} = 0$.

IV.B.2 Fixer un réel $\mathrm{C} > \mathrm{Max}\,(|a|, |d|)$, et majorer $u_{n+1}/(n+1)\,!$ en utilisant la question IV.A.2. Que dire de la série $\sum \dfrac{u_{n+1}}{n\,!} z^n$, pour $|z| < 1/\mathrm{C}$?

IV.C Il faut ici supposer que la suite v_n ne s'annule pas pour que la suite q_n soit définie.

IV.D Rien ne prouve que l'algorithme demandé ici converge ; il n'est pas demandé de le vérifier.

IV.G Pour une fonction polynomiale de type $\mathrm{G}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\mathrm{N}} \alpha_k x^k$, exprimer la fonction polynomiale qui, d'après l'équation différentielle vérifiée par G, doit être nulle. En déduire le type de condition que doivent vérifier les coefficients α_k (sans trop détailler), et une relation simple entre l'entier N et a, b, c et d.

Comme rappelé dans le rapport du jury, ce dernier apprécie, de façon générale, « que les raisonnements, mettant en jeu des points importants du programme, les mentionnent de façon claire et précise. Si de nombreux candidats font des efforts louables de rédaction et de présentation de leur travail, il reste qu'une proportion importante de copies sont mal rédigées et peu lisibles. » Il souligne également que « la qualité de la rédaction joue un rôle important dans l'appréciation des copies et encourage fortement les futurs candidats à faire des efforts dans cette direction ».

Question préliminaire

Remarquons tout d'abord que l'algorithme proposé converge, du fait que l'entier k, initialisé à la valeur b, diminue strictement à chaque boucle ; l'algorithme se termine lorsque $k = 0$.

Pour se donner une idée de la valeur $f(a, b)$, donnée par l'entier i à la fin des boucles, calculons les valeurs successives de $f(a, n)$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ et pour a un complexe quelconque fixé : on obtient $f(a, 0) = 1$, $f(a, 1) = a$, $f(a, 2) = a^2$. Ces constatations suggèrent un candidat pour $f(a, n)$: $f(a, n) = a^n$. Montrons donc par récurrence que

$$\mathscr{P}(n) : \quad \forall k \in \mathbb{N} \,/\, k \leqslant n \qquad f(a, k) = a^k$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On effectue ici une récurrence forte, c'est pour cela que la propriété s'écrit

$$\mathscr{P}(n) : \qquad \forall k \in \mathbb{N} \,/\, k \leqslant n \qquad f(a, k) = a^k$$

et non $$\mathscr{P}(n) : \qquad f(a, n) = a^n$$

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie car l'algorithme donne directement $f(a, 0) = 1$ sans passer par la boucle.
- $\underline{\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)}$:
  - si $n+1$ est impair, alors $f(a, n+1) = a \cdot f(a, n)$ donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $f(a, n+1) = a \cdot a^n = a^{n+1}$.
  - si $n + 1$ est pair, on a alors $f(a, n+1) = f\left(a^2, (n+1)/2\right)$ donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $f(a, n+1) = (a^2)^{\frac{n+1}{2}} = a^{n+1}$.
- <u>Conclusion</u> : $\qquad \forall b \in \mathbb{N} \quad \forall a \in \mathbb{C} \qquad f(a, b) = a^b$

On peut de plus remarquer que dans le cas où $n + 1$ est pair, l'hypothèse de récurrence suppose que $n+1/2 \leqslant n$, c'est-à-dire $n \geqslant 1$, ce qui est bien vérifié puisque si $n = 0$ alors $n + 1$ est impair.

I. Récurrence en dimension 1

I.A Le calcul de u_n, pour un entier n donné, s'obtient en déterminant, grâce à une boucle, tous les termes successifs de la suite u jusqu'à l'indice n.

Version Maple	Version Mathematica
$f :=$ **proc**(a, b, n, u) **local** i, k : $i := u$: **for** k **from** 1 **to** n **do** $i := a * i + b$: **od** : i : **end** :	$f[a, b, u, n]$:= Block$[\{i, k\}$, $i = u$; $k = 0$; Do $[i = i * a + b, \{k, n\}]$; $i]$

I.B Soit $n \in \mathbb{N}$. On a l'équivalence

$$\begin{aligned} && v_{n+1} &= a v_n \\ \iff && u_{n+1} + k &= a\,(u_n + k) \\ \iff && a u_n + b + k &= a u_n + ak \end{aligned}$$

Ainsi la suite v vérifie la relation de récurrence $v_{n+1} = a v_n$ si et seulement si

$$\boxed{k = \frac{b}{a-1}}$$

I.C La suite v étant géométrique de raison a, on peut en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = a^n v_0$$

si bien que $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n + \frac{b}{a-1} = a^n \left(u_0 + \frac{b}{a-1} \right)$$

d'où $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = a^n u_0 + \frac{(a^n - 1)}{a-1} b}$$

I.D On remarque grâce à la question I.C que la série entière $\mathrm{S}(z) = \sum u_n z^n$ peut s'écrire comme la somme de deux séries entières géométriques :

$$\mathrm{S}(z) = \left(u_0 + \frac{b}{a-1} \right) \sum a^n z^n - \frac{b}{a-1} \sum z^n$$

Si $a \neq 0$, la série $\sum a^n z^n$ a pour rayon de convergence $1/|a|$, et la série $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1.

De plus, la somme de deux séries entières de rayons de convergence R et R′, avec $\mathrm{R} \neq \mathrm{R}'$, est égal à $\min(\mathrm{R}, \mathrm{R}')$.

On peut donc distinguer les cas suivants :

- si $u_0 = b = 0$, alors $\mathrm{S}(z) = 0$ et $\rho = +\infty$;
- si $b = 0$ et $u_0 \neq 0$, alors $\mathrm{S}(z) = u_0 \sum a^n z^n$ et $\rho = \dfrac{1}{|a|}$;
- si $b \neq 0$ et $u_0 = \dfrac{-b}{a-1}$, alors $\mathrm{S}(z) = \dfrac{-b}{a-1} \sum z^n$ et $\rho = 1$;
- si $b \neq 0$ et $u_0 \neq \dfrac{-b}{a-1}$, alors $\rho = \min\left(1, \dfrac{1}{|a|}\right)$.