# X Physique 1 PC 2008 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Langlois (Enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Jean-Christophe Tisserand (ENS Lyon) et Emmanuel Loyer (Professeur en CPGE).

Ce sujet traite plusieurs aspects des techniques utilisées en échographie. Il comporte quatre parties relativement indépendantes :

- la première partie étudie la propagation d'une onde acoustique unidimensionnelle ;
- la deuxième concerne la réflexion et la transmission des ondes sonores à l'interface entre deux milieux ;
- la troisième utilise les résultats précédents pour les appliquer aux principes de base de l'échographie ;
- enfin, la dernière partie aborde des techniques plus complexes d'émission et de focalisation de faisceaux d'ondes ultrasonores.

Les deux premières parties sont très abordables : elles contiennent des questions classiques sur la propagation et la réflexion-transmission des ondes sonores, qui constituent des applications directes du cours. Les deux parties suivantes, plus appliquées, comportent de nombreuses questions qualitatives et demandent plus d'intuition et de sens physique. Dans la troisième partie, on démontre la formule de l'effet Doppler, tandis que la quatrième partie, bien qu'elle concerne toujours les ondes acoustiques, nécessite de maîtriser aussi le cours d'optique ondulatoire (diffraction par une fente et par un réseau). C'est donc un bon problème de révision, qui passe progressivement des questions de cours à des applications demandant plus de réflexion.

# Indications

## Partie I

I.4 Dériver l'équation d'Euler par rapport à $x$, insérer l'équation de conservation de la masse et enfin utiliser le résultat de la question I.3 pour relier $\mu$ à $\pi$.

I.7 Utiliser le fait que $\mathrm{PV}^{\gamma} = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$ pour une transformation isentropique.

## Partie II

II.3 Attention : la relation entre $\pi(x,t)$ et $v(x,t)$ établie à la question II.1 n'est valable que pour les ondes se propageant dans le sens des $x$ croissants.

## Partie III

III.3 Comparer les impédances des différents tissus biologiques.

III.4 Penser aux réflexions multiples entre les tissus.

III.5.1 La période du signal reçu par le globule en mouvement est différente de celle émise par le transducteur immobile. Pour la calculer, considérer deux signaux émis à une période d'intervalle, calculer la distance qu'ils parcourent et l'instant auquel ils atteignent le globule. Procéder de même pour l'onde réfléchie et montrer que

$$\mathrm{T_r} = \frac{c - \mathrm{V}}{c + \mathrm{V}}\,\mathrm{T_i}$$

## Partie IV

IV.2.4 Retrouver la formule donnant l'intensité diffractée par un réseau :

$$\mathrm{I}(\theta) = \mathrm{I_0}\,\mathrm{sinc}^2 u \left[ \frac{\sin\left(\mathrm{N}\pi\,\dfrac{d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin\left(\pi\,\dfrac{d}{\lambda}\sin\theta\right)} \right]^2$$

IV.4 Calculer la différence de marche supplémentaire introduite entre deux transducteurs par le retard temporel.

IV.5.2 L'énoncé parle indifféremment de résolution et d'extension spatiales du faisceau. Pour obtenir le résultat demandé, il faut calculer la résolution qui, d'après le critère de Rayleigh, vaut la moitié de l'extension spatiale.

IV.6.1 Penser à tenir compte du trajet retour de l'onde.

IV.6.3 Faire l'analogie entre une impulsion électrique de durée finie et un train d'ondes lumineuses.

IV.7.1 Calculer le temps mis par les signaux issus de chaque transducteur pour parvenir au point F.

# I. Propagation des ondes acoustiques

**I.1** La conservation de la masse se traduit par

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \overrightarrow{v}) = 0}$$

Puisque $\rho = \rho_0 + \mu$ et que $\rho_0$ est constant, on peut écrire

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}\left[(\rho_0 + \mu)\overrightarrow{v}\right] = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \overrightarrow{v} + \operatorname{div}(\mu \overrightarrow{v}) = 0$$

Or, $\operatorname{div}(\mu \overrightarrow{v}) = \mu \operatorname{div} \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \mu$ est un terme du second ordre. En ne conservant que les termes d'ordre 1, il vient donc

$$\boxed{\frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0}$$

**I.2** Si l'on néglige les effets de la pesanteur, l'équation d'Euler s'écrit

$$\rho \left[\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}})\overrightarrow{v}\right] = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \mathrm{P}$$

Projetons cette équation sur $\overrightarrow{e_x}$. Comme $v$ ne dépend que de $x$ et de $t$, elle se réduit à

$$\boxed{\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}}$$

Or, $\mathrm{P} = \mathrm{P}_0 + \pi$ et $\mathrm{P}_0$ est uniforme, donc cette équation se réécrit

$$(\rho_0 + \mu)\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial \pi}{\partial x}$$

En éliminant les termes d'ordre supérieur à 1, il vient

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \pi}{\partial x}}$$

**I.3** L'évolution est supposée isentropique. On peut écrire, au premier ordre,

$$\chi_\mathrm{S} = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{P}}\right)_\mathrm{S} \approx \frac{1}{\rho_0}\frac{\rho - \rho_0}{\mathrm{P} - \mathrm{P}_0} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\mu}{\pi}$$

d'où

$$\boxed{\pi(x,t) = \frac{1}{\rho_0 \chi_\mathrm{S}}\, \mu(x,t)}$$

> La pression s'équilibrant beaucoup plus rapidement que la température, les transferts thermiques sont négligeables. En l'absence de viscosité, il n'existe en outre aucune source d'irréversibilité : l'évolution est bien isentropique.

**I.4** Dérivons l'équation d'Euler par rapport à $x$

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2}$$

et insérons l'équation de la conservation de la masse

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \mu}{\partial t}\right) = -\frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2}$$

En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient finalement

$$\boxed{\frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0\, \chi_\mathrm{S}} \frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2}}$$

On reconnaît l'équation de d'Alembert décrivant la propagation d'une onde de célérité

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0\, \chi_\mathrm{S}}}}$$

**I.5** Dérivons maintenant l'équation d'Euler par rapport au temps

$$\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \pi}{\partial t}\right) = \frac{1}{\rho_0\, \chi_\mathrm{S}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mu}{\partial t}\right)$$

En utilisant à nouveau l'équation de conservation de la masse, il vient

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0\, \chi_\mathrm{S}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}$$

**I.6** La solution générale de l'équation de d'Alembert à une dimension est

$$\boxed{v(x,t) = \mathrm{A}\, f(x - c\,t) + \mathrm{B}\, g(x + c\,t)}$$

Les deux termes représentent des ondes progressives se propageant avec une célérité $c$, respectivement dans la direction des $x$ croissants et décroissants.

**I.7** Au cours d'une évolution isentropique, un gaz parfait vérifie la loi de Laplace

$$\mathrm{P}\mathrm{V}^\gamma = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$$

ce qui implique
$$\mathrm{P}\rho^{-\gamma} = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$$

Différentions cette relation autour de $\rho_0$ et $\mathrm{P}_0$

$$\rho^{-\gamma}\, \mathrm{dP} - \gamma\, \mathrm{P}\, \rho^{-\gamma-1}\, \mathrm{d}\rho = 0$$

d'où, au premier ordre
$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dP}} = \frac{\rho_0}{\gamma\, \mathrm{P}_0}$$

Finalement,
$$\boxed{\chi_\mathrm{S} = \frac{1}{\gamma\, \mathrm{P}_0}}$$

> On peut arriver plus rapidement au résultat en prenant la différentielle logarithmique de la loi de Laplace :
> $$\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{P}} - \gamma\, \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = 0$$

Utilisons maintenant la loi des gaz parfaits pour déterminer la pression de l'air à la température $\mathrm{T} = 293$ K :

$$\mathrm{P}_0 = \frac{\rho_0\, \mathrm{R}\, \mathrm{T}}{\mathrm{M}}$$

Ainsi,
$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0\, \chi_\mathrm{S}}} = \sqrt{\frac{\gamma\, \mathrm{R}\, \mathrm{T}}{\mathrm{M}}} = 343 \text{ m.s}^{-1}}$$

**I.8** Dans l'eau, $\chi_\mathrm{S} = 4{,}57.10^{-10}$ $\mathrm{Pa}^{-1}$, et la vitesse des ondes sonores est donc

$$\boxed{c = 1{,}48.10^3 \text{ m.s}^{-1}}$$