Centrale Physique 1 PC 2008 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jimmy Mullaert (École Polytechnique) ; il a été relu par Emmanuel Bourgeois (ENS Lyon) et Jean-Julien Fleck (Professeur en CPGE).

L'objet de ce problème est de comprendre quelques phénomènes physiques qui gouvernent la vie d'une bactérie, l'*Escherichia Coli*. Cette bactérie, présente naturellement dans le corps humain, intervient notamment dans le processus de digestion. Sa petite taille et sa multiplication très rapide en font un objet d'étude particulièrement intéressant pour les chercheurs.

L'énoncé comporte des questions de cours et d'analyse dimensionnelle faciles à traiter, ce qui permet de réserver du temps pour le reste. L'énoncé est assez directif et donne les résultats intermédiaires, ce qui permet de ne pas rester bloqué. Les calculs exigés ne sont pas très lourds et les questions où une véritable réflexion physique est attendue ont une grande importance sur l'opinion que le correcteur se fait de la copie.

- La première partie est courte. Elle a pour thème central la diffusion et vise à calculer la taille limite que peut atteindre une bactérie qui consomme un nutriment diffusant dans le milieu. Comme la bactérie consomme d'autant plus de dioxygène que sa taille est importante, une taille limite apparaît naturellement. Il est intéressant de comparer cette taille à celle des bactéries.
- La deuxième partie porte sur l'électrostatique. Elle a pour but d'estimer la différence de potentiel qui règne entre les deux côtés de la membrane. Elle commence par l'étude de l'influence qu'une plaque chargée négativement peut avoir sur un électrolyte.
- La troisième partie est consacrée à l'étude de la propulsion d'une bactérie à l'aide d'un flagelle en forme d'hélice. Elle nécessite une bonne compréhension du cours de mécanique. Les notions de travail, de puissance et d'énergie sont toutes mises en œuvre.
- Enfin, le « moteur » qui actionne un flagelle est étudié dans la dernière partie. Son rendement est évalué en comparant sa puissance à la puissance cédée par des protons qui descendent un gradient de potentiel. Dans cette partie, on utilise des notions de thermodynamique et de mécanique du solide. Une sous-partie, la plus difficile du sujet, s'intéresse à la caractéristique couple/fréquence de rotation d'un moteur biologique et requiert un bon sens physique pour être interprétée correctement.

Ce sujet aborde une grande partie du programme de physique de deuxième année et constitue un bon problème de synthèse. On voit également combien ces notions de physiques sont utiles à l'étude de phénomènes biologiques.

Indications

I.A.1 Utiliser les invariances et la symétrie du problème pour mettre le vecteur densité de courant sous la forme donnée par l'énoncé.

I.A.2 Attention au signe de ϕ : c'est le flux entrant qui est demandé. Écrire l'équation de conservation des molécules de dioxygène entre deux sphères de rayon r_1 et r_2.

I.B.1 Relier le flux de dioxygène entrant dans la sphère de rayon R et la consommation de la bactérie.

II.A.1 Juste après l'introduction de la plaque chargée, quelle force ressentent les anions et les cations ? À l'équilibre, où se situent-ils majoritairement ?

II.A.5 À l'équilibre, les courants de diffusion et de convection se compensent.

II.A.6.a Relier tout d'abord ρ à n_+ et n_- puis utiliser les relations trouvées à la question précédente.

II.B.1 Utiliser l'identité $\overrightarrow{\mathrm{E}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\psi$.

II.B.2 Utiliser l'équation de Maxwell-Gauss.

II.C.1 Un champ électrique fuit les zones chargées positivement.

II.C.2 Il est possible d'intégrer les deux membres de l'équation donnée par l'énoncé.

III.A.1 Dans quel cas la force de traînée est-elle la plus grande ?

III.A.3 Écrire une décomposition de la vitesse $\overrightarrow{v}$ en une partie selon $\overrightarrow{u}$ et une qui lui est orthogonale. La linéarité de la force de traînée permet alors de conclure.

III.B.2 Quelle est la figure décrite par un point courant du flagelle ?

III.C.1 Pour l'intégration de la force de traînée, remarquer que la composante angulaire intégrée sur un tour est nulle.

III.C.3 En régime permanent, la vitesse est constante et l'accélération nulle. Ainsi, les forces qui s'appliquent sur la bactérie se compensent.

IV.A.2 Lorsque dn protons passent de l'extérieur à l'intérieur, quelle est la variation du nombre de protons à l'extérieur et à l'intérieur ? En déduire une expression de la variation dG de l'enthalpie libre et donc du travail récupérable.

IV.B.1 En régime permanent, la somme des moments qui s'appliquent sur l'axe du moteur est nulle.

IV.B.3 Pour interpréter cette caractéristique couple/fréquence de rotation, penser à la caractéristique d'un générateur de tension sur lequel on branche une résistance.

IV.D.1 Attention, il y a huit unités biologiques.

I. Taille critique d'une bactérie aérobie

I.A Densité particulaire en dioxygène au voisinage de la bactérie

I.A.1 La loi de Fick relie de manière phénoménologique la densité de courant particulaire à la densité particulaire. Elle s'écrit de manière générale

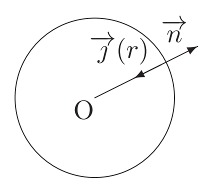
$$\overrightarrow{\jmath} = -\mathrm{D}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\; n$$

Ici, compte tenu de la symétrie sphérique du problème, le vecteur densité de courant est nécessairement dirigé selon le vecteur radial $\overrightarrow{e_r}$. De plus, ce vecteur et la densité particulaire ne dépendent que de la variable r en raison de l'invariance du problème par rapport aux deux variable sphériques θ et φ. Finalement, la loi de Fick devient

$$\boxed{j(r) = -\mathrm{D}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}}$$

> Il est important de remarquer que ce sont les considérations de symétrie qui donnent la direction du vecteur $\overrightarrow{\jmath}$ et que les invariances donnent des informations sur la dépendance des grandeurs (ici $\overrightarrow{\jmath}$ et n) par rapport aux variables. Ce type de raisonnement est introduit en cours pour la détermination de champs électriques et magnétiques.

I.A.2 Le nombre $\phi(r)$ de molécules de dioxygène qui entrent dans une surface sphérique S de rayon r est relié à la densité de courant par



$$\phi(r) = -\oiint_{\mathrm{S}} \overrightarrow{\jmath}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = \mathrm{dS}\,\overrightarrow{n}$$

> Attention au signe moins qui vient du fait que c'est le flux **entrant** que l'on souhaite calculer alors que la normale à la surface est **sortante**.

Mais ici, $\overrightarrow{\jmath} = j(r)\,\overrightarrow{e_r}$. On obtient, après intégration sur la sphère de rayon r et de surface $4\pi\,r^2$

$$\boxed{\phi(r) = -4\pi r^2 j(r)}$$

Considérons maintenant le volume V compris entre deux sphères de rayon r_1 et r_2 (on suppose $r_1 < r_2$). En régime permanent, et en l'absence de source de dioxygène, l'équation de conservation du nombre de molécules de dioxygène s'écrit simplement

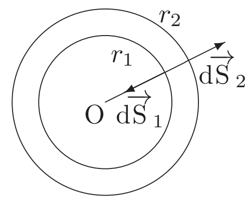
$$\mathrm{div}\;\overrightarrow{\jmath} = 0$$

> De manière générale, l'équation qui traduit la conservation du nombre de molécules de dioxygène de manière locale s'écrit
>
> $$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} + \mathrm{div}\;\overrightarrow{\jmath} = \alpha$$
>
> avec α le terme source correspondant au nombre de molécule de dioxygène

> créées par unité de volume et de temps. Pour justifier que $\overrightarrow{\jmath}$ est à flux conservatif, il faut d'une part citer le régime permanent qui permet d'annuler la dérivée temporelle, mais aussi l'absence de source, comme cela est décrit dans le rapport du jury.

Le vecteur $\overrightarrow{\jmath}$ est donc à flux conservatif. Cela impose en particulier

$$0 = \iiint_{\mathrm{V}} \mathrm{div}\,\overrightarrow{\jmath}\,\mathrm{dV} = \oiint_{\mathrm{S_1\cup S_2}} \overrightarrow{\jmath}\cdot\overrightarrow{\mathrm{dS}} = \phi(r_1) - \phi(r_2)$$



d'après le théorème de Green-Ostrogradski. Enfin,

$$\boxed{\phi(r_1) = \phi(r_2) = \phi}$$

Le flux de dioxygène à travers une surface sphérique ne dépend donc pas du rayon de cette surface. On le note ϕ dans la suite.

I.A.3 Exprimons maintenant la densité $n(r)$ dans tout l'espace en utilisant la loi de Fick et le résultat de la question I.A.2

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r} = \frac{\phi}{4\pi\,\mathrm{D}\,r^2}$$

Une intégration donne l'expression recherchée :

$$n(r) = -\frac{\phi}{4\pi\,\mathrm{D}\,r} + \mathrm{C^{te}}$$

Enfin, on détermine la constante en remarquant que la densité à l'infini vaut $c_0\,\mathscr{N}_{\mathrm{A}}$:

$$\boxed{n_1 = n(\mathrm{R}^+) = c_0\,\mathscr{N}_{\mathrm{A}} - \frac{\phi}{4\pi\,\mathrm{DR}}}$$

I.B Taille critique de la bactérie

I.B.1 La consommation donnée s'exprime en mol.kg^{-1}.s^{-1} ; il faut donc la multiplier par la constante d'Avogadro pour obtenir le nombre de molécules de dioxygène consommées par unité de masse et de temps. Enfin, en multipliant par la masse de la bactérie, on obtient la consommation de la bactérie par unité de temps, qui n'est autre que le flux ϕ avec lequel le dioxygène entre dans la sphère de rayon R. Ainsi,

$$\phi = \mathscr{A}\,\mathscr{N}_{\mathrm{A}}\,m$$

où $m = 4\pi\,\mu\mathrm{R}^3/3$ est la masse de la bactérie. On obtient finalement

$$\boxed{\phi = \frac{4}{3}\pi\,\mu\mathrm{R}^3\mathscr{N}_{\mathrm{A}}\mathscr{A}}$$

I.B.2 Substituons ce résultat dans l'expression trouvée à la question I.A.3

$$\boxed{n_1 = c_0\,\mathscr{N}_{\mathrm{A}} - \frac{\mu\mathrm{R}^2\mathscr{N}_{\mathrm{A}}\mathscr{A}}{3\mathrm{D}}}$$

Cette grandeur diminue lorsque le rayon R augmente. En effet, la bactérie consommant plus de dioxygène, le flux ϕ augmente et le gradient de n est plus important. On constate donc un écart plus grand entre la densité particulaire près de la bactérie et celle à l'infini.