Mines Physique 1 PSI 2007 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Corentin Coulais (ENS Lyon) ; il a été relu par Jérôme Lambert (Enseignant-chercheur à l'université) et Emmanuel Bourgeois (ENS Lyon).

Ce problème aborde la « physique du bain » à travers deux parties très distinctes.

La première propose d'étudier le fonctionnement d'un thermomètre à cristaux liquides, qui présentent des propriétés de diffraction et dont le pas varie avec la température. Dans le sujet, ils sont modélisés par des miroirs parallèles. On établit les propriétés optiques d'un tel système dès les premières questions, qui sont proches du cours. Il s'agit ensuite de choisir les mélanges de cristaux liquides adaptés aux contraintes d'un affichage sensible à des variations de température.

La seconde partie étudie le principe du débitmètre électromagnétique.

- Dans un premier temps, il s'agit de mettre en évidence l'existence d'une f.é.m. induite au sein d'un fluide conducteur traversant une zone où règne un champ magnétique uniforme, puis de calculer la variation de cette f.é.m. en fonction du mouvement du fluide. Dans un deuxième temps, on montre que dans certains régimes d'écoulement, cette vitesse est proportionnelle au débit volumique que l'on cherche à mesurer. À l'aide de la notion de couche limite, on étudie le profil de vitesse de l'écoulement dans la canalisation, ce qui permet de justifier le domaine de fonctionnement du débitmètre. Cette partie nécessite du recul vis-à-vis du cours, qui est utilisé hors de son cadre habituel.
- La dernière sous-partie propose d'étudier un dispositif de détection synchrone, utilisé pour mesurer la f.é.m. induite dans le débitmètre. Son fonctionnement est fondé sur un composant multiplieur et sur un filtre que l'on caractérise.

Ce problème permet de réviser la diffraction optique, l'induction et les filtres en électrocinétique. C'est un problème intéressant qui permet en outre d'aborder – à un niveau raisonnable – quelques questions originales sur les propriétés thermiques des cristaux liquides et la caractérisation de régimes d'écoulement. Cependant, le nombre limité de questions oblige à conduire des raisonnements légèrement différents de ceux du cours, le tout avec peu d'indications de la part de l'énoncé.

Indications

Partie A

1 On est ici dans le cadre de la diffraction de Fraunhofer. Exploiter le principe d'Huygens-Fresnel et faire l'hypothèse que le miroir diffractant est de dimension infinie dans la direction perpendiculaire au plan d'incidence.

2 Dans quel cas peut-on retrouver les lois de l'optique géométrique ?

3 Ce dispositif est analogue à celui des fentes d'Young. Du calcul de la différence de marche, on déduit le déphasage entre les amplitudes complexes des deux rayons.

5 Quel est l'effet d'un réseau plan ou d'un Fabry-Pérot sur la dispersion angulaire d'un rayon lumineux ?

6 Injecter la relation entre θ et θ', déduite des lois de la réfraction de Snell-Descartes, dans le calcul de la différence de marche entre les deux rayons réfractés en A et C.

8 L'œil n'a pas la même sensibilité à toutes les longueurs d'onde.

9 En remarquant que L diminue si T augmente, on voit qu'il faut comparer

- L à ℓ_1 et L_1 pour avoir un maximum de réflexion à 37 °C et un minimum à 40 °C ;
- L à L_1 et ℓ_2 pour avoir un maximum de réflexion pour 40 °C et un minimum à 37 °C.

10 On trouve α en calculant le rapport des pas du réseau à différentes températures.

Partie B

11 Le débit volumique est le volume de liquide traversant une section de la canalisation par unité de temps dt : $D = dV/dt$.

13 Effectuer un changement de coordonnées pour conduire ce calcul.

14 Un champ statique permettrait-il de séparer une éventuelle composante continue de la tension de la force électromotrice que l'on cherche à mesurer ?

15 Pour la première méthode de caractérisation de l'épaisseur de la couche limite, il s'agit d'introduire un critère arbitraire - mais crédible - traduisant la condition $df/dr \gg 1/a$ - par exemple $df/dr(r_c) = 10/a$. Ce critère permet d'intégrer la longueur caractéristique r_c qui fait défaut ici.

16 On utilise ici le résultat de la question 12 et les critères définissant les frontières de la couche limite, introduites à la question précédente.

19 Quelles sont les composantes du bruit présentes avant, puis après le filtrage par le circuit RC ?

Le bain de bébé

A. Thermomètre à Cristaux Liquides

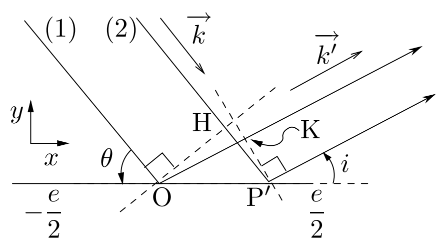
$\boxed{1}$ Il y a diffraction si la taille caractéristique de l'objet diffractant est de l'ordre de la longueur d'onde du rayon incident. On suppose que le miroir est infini dans la direction (Oz). Le problème peut donc se ramener à l'étude de la diffraction dans le plan (xOy). Le système étudié satisfait les conditions de diffraction de Fraunhofer ; en notation complexe, l'amplitude de l'onde mesurée en M situé à l'infini dans la direction i s'écrit alors

$$\underline{\mathscr{A}}(\mathrm{M}) = \int_{\mathrm{S}} \alpha\, \underline{\mathscr{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{P})\, \mathrm{dS}$$

où α est une constante, et $\underline{\mathscr{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{P})$ l'amplitude de l'onde plane en M de l'onde émise par l'élément de surface dS entourant le point P de l'ouverture diffractante.

> Cette formule découle du principe d'Huygens-Fresnel, qui stipule qu'un élément de surface dS d'un objet diffractant, atteint par une onde monochromatique de pulsation ω, se comporte comme une source secondaire d'onde sphérique de même pulsation et de même phase que l'onde incidente.
>
> La constante α est proportionnelle à $1/(\mathrm{i}\,\lambda\,\mathrm{PM})$. On ne s'en préoccupe plus car le terme PM, grand devant OP dans le cadre de diffraction de Fraunhofer, peut être approximé par OM.

En outre, les vecteurs d'onde $\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{k'}$ des ondes incidentes et diffractées forment des angles θ et i avec le plan du miroir. Considérons deux rayons incidents en O(0, 0) et P(x, 0), portés par $\overrightarrow{k}$, et diffractés dans la direction portée par $\overrightarrow{k'}$.



D'après la figure ci-dessus et en vertu du théorème de Malus, le déphasage entre le rayon (1) et le rayon (2) est donné par

$$\varphi = (\overrightarrow{k} - \overrightarrow{k'}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$$

δ, qui est la différence de marche entre (1) et (2), s'exprime par

$$\delta = \mathrm{HP} - \mathrm{OK}$$

Or, $\qquad \mathrm{HP} = x\,\cos\theta \qquad$ et $\qquad \mathrm{OK} = x\cos i$

donc $\qquad \delta = x\,(\cos\theta - \cos i)$

Exprimons $\underline{\mathscr{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{P})$ en fonction de $\underline{\mathscr{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{O})$.

> Le choix du point O étant tout à fait arbitraire, on aurait aussi bien pu placer l'origine de l'axe x en $-e/2$. Cependant, la convention choisie permet d'aboutir plus directement au résultat demandé.

Les deux amplitudes sont déphasées de φ, ce qui s'écrit

$$\underline{\mathscr{A}}(\mathrm{M},\mathrm{P}) = \underline{\mathscr{A}}(\mathrm{M},\mathrm{O})\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi}$$

Finalement,
$$\begin{aligned}\underline{\mathscr{A}}(\mathrm{M}) &= \alpha\,\underline{\mathscr{A}}(\mathrm{M},\mathrm{O})\int_{-e/2}^{e/2}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,2\pi x(\cos\theta\,-\,\cos i)/\lambda}\\ &= \alpha\,\underline{\mathscr{A}}(\mathrm{M},\mathrm{O})\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\pi e(\cos\theta-\cos i)/\lambda}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\pi e(\cos\theta-\cos i)/\lambda}}{\mathrm{i}\,2\pi\,(\cos\theta-\cos i)/\lambda}\\ \underline{\mathscr{A}}(\mathrm{M}) &= \alpha\,\underline{\mathscr{A}}(\mathrm{M},\mathrm{O})\,e\ \mathrm{sinc}\,\left(\frac{\pi e}{\lambda}(\cos\theta-\cos i)\right)\end{aligned}$$

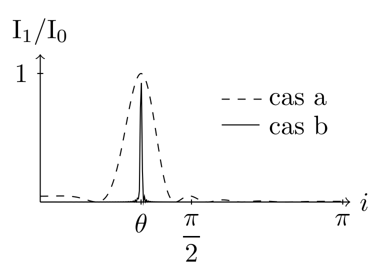
Puisque
$$\mathrm{I}_1(\mathrm{M}) \propto \underline{\mathscr{A}}(\mathrm{M})\,\underline{\mathscr{A}}(\mathrm{M})^*$$

$$\boxed{\mathrm{I}_1(\mathrm{M}) = \mathrm{I}_0\,\mathrm{sinc}\,^2\left(\frac{\pi e}{\lambda}(-\cos\theta\cos i)\right)\qquad\text{avec}\qquad \mathrm{I}_0 \propto \alpha^2\,|\underline{\mathscr{A}}(\mathrm{M},\mathrm{O})|\,^2 e^2}$$

| On voit que I_0 est proportionnel à e^2.

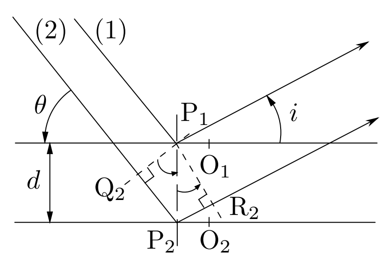
2 Le tracé de I_1 en fonction de i est représenté ci-dessous. On a choisi $e = 3\,\lambda \simeq \lambda$ pour le cas a, et $e = 50\,\lambda \gg \lambda$ pour le cas b.

Il y a un maximum global d'intensité lumineuse lorsque $i = \theta$ dans les deux cas. Cependant, la courbe est moins piquée dans le cas a, ce qui s'explique par le fait qu'un objet de la taille de la longueur d'onde de la lumière incidente crée une diffraction importante. On voit que dans le cas b, on retrouve quasiment un résultat d'optique géométrique, à savoir la loi de réflexion de Snell-Descartes.



3 On considère deux rayons (1) et (2) arrivant avec un angle θ respectivement en P_1 et P_2, et repartant avec un angle i par rapport au plan des miroirs (voir la figure ci-contre). Les distances $\mathrm{Q}_2\mathrm{P}_2$ et $\mathrm{P}_2\mathrm{R}_2$ sont respectivement données par $d\sin\theta$ et $d\sin i$. Comme

$$\delta = \mathrm{Q}_2\mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_2\mathrm{R}_2$$



il vient
$$\boxed{\delta = d(\sin\theta + \sin i)}$$

Soit $\underline{\mathscr{A}}(\mathrm{M},\mathrm{P}_1)$ (respectivement $\underline{\mathscr{A}}(\mathrm{M},\mathrm{P}_2)$) l'amplitude au point M, diffractée en M par le point P_1 (respectivement P_2). Ainsi,

$$\underline{\mathscr{A}}(\mathrm{M},\mathrm{P}_2) = \underline{\mathscr{A}}(\mathrm{M},\mathrm{P}_1)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi\delta/\lambda}$$

D'après la question 2 , l'amplitude diffractée par le premier miroir est

$$\underline{\mathscr{A}}_1(\mathrm{M}) = \alpha\,\underline{\mathscr{A}}(\mathrm{M},\mathrm{O}_1)\ \mathrm{sinc}\,\left(\frac{\pi e}{\lambda}(\cos\theta-\cos i)\right)$$

Donc
$$\underline{\mathscr{A}}_2(\mathrm{M}) = \alpha\,\underline{\mathscr{A}}_1(\mathrm{M})\ \mathrm{sinc}\,\left(\frac{\pi e}{\lambda}(\cos\theta-\cos i)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi\delta/\lambda}$$