E3A Physique PSI 2007 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sandrine Ngo (ENS Cachan) ; il a été relu par Vincent Freulon (ENS Ulm) et Jean-Julien Fleck (Professeur en CPGE).

Le sujet porte sur des problématiques liées à un satellite de communication, depuis sa mise en orbite par un lanceur de type Ariane V jusqu'à son fonctionnement : communications entre le satellite et la Terre, puis traitement du signal de réception. Il comporte trois parties indépendantes faisant appel à des domaines très variés de la physique.

- La première partie s'intéresse à la dynamique de la propulsion de la fusée lors du décollage, ainsi qu'au comportement du satellite une fois en orbite.
- Dans la deuxième partie, on étudie la propagation d'une onde électromagnétique à travers un plasma afin de modéliser le comportement des signaux de communication dans l'ionosphère. On considère en outre l'influence d'un champ magnétique statique sur cette onde.
- La troisième partie est consacrée à l'électronique qui intervient dans le traitement du signal de réception. Après avoir étudié un modèle de condensateur, puis caractérisé un filtre, le sujet se penche sur un montage plus complexe dans lequel intervient le filtre précédent.

Ce problème comporte beaucoup de questions pour une épreuve de trois heures. Néanmoins, celles-ci sont pour la plupart très classiques et proches du cours de la filière PSI : celui de première année pour la mécanique et l'électronique, celui de deuxième année pour l'électromagnétisme. Certaines questions sont plus laborieuses et calculatoires, notamment dans la partie II portant sur l'étude d'une particule chargée dans un champ magnétique statique. Il est conseillé de les sauter le jour du concours. De manière générale, les justifications et les interprétations physiques des résultats sont très attendues par le jury.

Indications

Première partie

I.A.1 Il faut bien définir le système (vitesse et masse) en t puis en $t + \mathrm{d}t$. Écrire la variation de la quantité de mouvement entre ces deux instants. Ne pas oublier de prendre en compte l'action de la gravité. Faire une approximation au premier ordre.

I.A.2 La poussée des propulseurs doit compenser le poids de la fusée au décollage.

I.A.3 Intégrer l'expression de l'accélération entre 0 et t.

Deuxième partie

II.A.1 Pour comparer les actions des champs électrique et magnétique, utiliser la relation de structure qui relie $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ à c.

II.A.2 Dans l'expression du vecteur densité volumique de courant, additionner les contributions de chaque type de porteurs de charge.

II.A.3 Un conducteur ohmique vérifie la loi d'Ohm locale :

$$\underline{\overrightarrow{\mathrm{J}}}_{\,\text{élec}} = \underline{\sigma}\,\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}}$$

II.A.4 La dérivation temporelle est équivalente à une multiplication par $\mathrm{j}\omega$.

II.A.5 Utiliser l'identité vectorielle

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{A}}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{A}}) - \Delta\overrightarrow{\mathrm{A}}$$

vérifiée pour tout vecteur $\overrightarrow{\mathrm{A}}$.

II.A.7 Pour calculer v_{g}, différentier l'expression de $\underline{k}^2$ en fonction de ω^2 déterminée dans la question précédente.

II.A.9 Utiliser les équations de continuité des champs à la traversée d'une interface. Le champ total dans l'atmosphère est la somme des champs incident et réfléchi.

II.B.1 Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la particule chargée en ne considérant que l'action du champ magnétique. Projeter ensuite l'équation sur des axes judicieusement choisis afin de caractériser la vitesse (suivant la direction du champ magnétique, puis celle de la vitesse...).

II.B.2 Le champ $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ est uniforme.

II.B.5 Projeter le principe fondamental de la dynamique suivant $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$. Remplacer l'opérateur dérivation temporelle par $\mathrm{j}\omega$.

II.B.6 Pour que E_x et E_y soient non nuls, il faut que le système d'équations linéaires auquel ces grandeurs obéissent ait un déterminant nul. En déduire deux relations possibles entre les coefficients α et β.

II.B.7 Pour le commentaire, considérer le déphasage entre les composantes suivant $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ de chaque vecteur $\overrightarrow{\mathrm{J}_+}$ et $\overrightarrow{\mathrm{J}_-}$. En déduire leur polarisation.

Troisième partie

III.A.1 Prendre en compte la résistance du voltmètre dans le circuit équivalent.

III.B.1 Utiliser la méthode du pont diviseur de tension, après avoir écrit les impédances équivalentes du circuit. Faire une étude asymptotique afin de tracer l'allure de $|\mathrm{H}(\mathrm{j}\omega)|$ et déterminer la nature du filtre.

III.B.3 Relier l'amplitude de $s(t)$ à celle de $e(t)$ à l'aide de la fonction de transfert.

III.C.2 Faire un développement limité de G au second ordre en ε.

III.C.3 Le déphasage est égal à l'argument de la fonction de transfert.

I. Étude mécanique d'une fusée et de son satellite

A. Décollage de la fusée

> La fusée a une masse variable. Il s'agit d'un système ouvert, ce qui rend délicate l'application du principe fondamental de la dynamique. Il faut donc se ramener à un système fermé en considérant le système total {fusée+gaz éjecté} à l'instant t, puis $t + \mathrm{d}t$. À noter que le système n'est pas isolé.

I.A.1 À l'instant t, le système est composé de la fusée et de tout ce qu'elle contient, de masse $m(t)$ et de vitesse $\overrightarrow{v}(t)$. Sa quantité de mouvement s'écrit

$$\overrightarrow{p}(t) = m(t)\,\overrightarrow{v}(t)$$

À l'instant $t + \mathrm{d}t$ le système fermé se décompose en deux sous-systèmes :

- d'une part la fusée et tout ce qu'elle contient de masse $m(t + \mathrm{d}t) = m(t) + \mathrm{d}m$ (avec $\mathrm{d}m < 0$) et de vitesse $\overrightarrow{v}(t + \mathrm{d}t)$;
- d'autre part le gaz qui a été expulsé par les propulseurs de masse $-\mathrm{d}m$ et de vitesse $\overrightarrow{v}(t) + \overrightarrow{u}$.

Dans ce cas, la quantité de mouvement est :

$$\overrightarrow{p}(t + \mathrm{d}t) = (m(t) + \mathrm{d}m)\,\overrightarrow{v}(t + \mathrm{d}t) - (\overrightarrow{v}(t) + \overrightarrow{u})\,\mathrm{d}m$$

> Ces deux situations sont représentées sur la figure 2 de l'énoncé.

La variation de quantité de mouvement entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\overrightarrow{p} &= \overrightarrow{p}(t + \mathrm{d}t) - \overrightarrow{p}(t)\\ &= m(t)\,[\overrightarrow{v}(t + \mathrm{d}t) - \overrightarrow{v}(t)] + \mathrm{d}m[\overrightarrow{v}(t + \mathrm{d}t) - \overrightarrow{v}(t) - \overrightarrow{u}]\end{aligned}$$

or
$$m(t)\,[\overrightarrow{v}(t + \mathrm{d}t) - \overrightarrow{v}(t)] \approx m(t)\;\mathrm{d}\overrightarrow{v}$$

De plus, on a au premier ordre

$$\mathrm{d}m\,[\overrightarrow{v}(t + \mathrm{d}t) - \overrightarrow{v}(t) - \overrightarrow{u}] \approx \mathrm{d}m\,(\mathrm{d}\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}) \approx -\mathrm{d}m\,\overrightarrow{u}$$

Donc
$$\mathrm{d}\overrightarrow{p} \approx m(t)\,\mathrm{d}\overrightarrow{v} - \mathrm{d}m\,\overrightarrow{u}$$

ce qui donne
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = m(t)\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u}$$

Par ailleurs, le système est soumis à son poids, donc d'après le principe fondamental de la dynamique

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = m(t)\overrightarrow{g_0}$$

En égalant les deux expressions précédentes puis en projetant suivant l'axe vertical,

$$m(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -m(t)\,g_0$$

La fusée comporte deux réacteurs qui expulsent du gaz à un débit massique constant valant q_{m} pour chacun d'eux. La masse de gaz expulsée pendant $\mathrm{d}t$ est alors :

$$-\mathrm{d}m = 2\,q_{\mathrm{m}}\,\mathrm{d}t$$

On en déduit l'évolution de la masse de la fusée en fonction du temps

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -2\,q_{\mathrm{m}}$$