

Centrale Physique PSI 2007 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jérôme Lambert (Enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Emmanuel Bourgeois (ENS Lyon) et par Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Ce sujet propose d'étudier différents éléments d'un dispositif de détection de véhicules à boucle inductive. Les quatre parties abordent des thèmes distincts mais elles dépendent les unes des autres. Il est judicieux de lire l'intégralité de l'énoncé avant de se lancer dans la rédaction, les réponses à certaines questions se trouvant régulièrement un peu plus loin dans l'énoncé !

- La partie I étudie un oscillateur quasi sinusoïdal et les conditions de son bon fonctionnement lorsqu'il est inséré dans un dispositif dissipant de l'énergie par effet Joule. Cette partie est une bonne révision des notions de base de l'électrocinétique et ne présente pas de difficulté particulière. La question I.A, qui porte sur la dissipation dans les conducteurs et sur les phénomènes d'induction, est plus difficile que les autres car plus qualitative.
- La partie II traite de la pénétration d'un champ électromagnétique oscillant dans un conducteur dans le cadre de l'approximation des régimes quasi permanents. Le modèle microscopique à la base de ce traitement est celui de Drude, objet de la question II.A. Cette partie est calculatoire et propose de revoir, sous différents points de vue, les relations de passage du champ magnétique à la surface de conducteurs.
- La partie III s'intéresse aux variations d'inductance d'un circuit enfoui lors du passage d'un véhicule sur la chaussée. Elle est une bonne occasion de revoir les propriétés de symétrie du champ magnétique, et d'aborder une méthode très utile pour décrire l'effet d'un conducteur parfait sur le champ magnétique régnant à l'extérieur de celui-ci : la méthode des *courants images*.
- L'étude d'un fréquencemètre est l'objet de la dernière partie. Cet élément s'insère dans le dispositif de détection du véhicule car il permet de mesurer les décalages de la fréquence propre d'oscillation de l'oscillateur quasi sinusoïdal induits par le passage du véhicule. Cette partie ne présente pas de difficulté particulière.

Ce problème est long et, si la partie électrocinétique ne présente pas de grande difficulté, celle consacrée à l'électromagnétisme est ardue et offre la possibilité de tester la solidité et la cohérence de ses connaissances dans ce domaine. C'est pourquoi l'ensemble constitue un très bon moyen de réviser le cours d'électromagnétisme en cours d'année. En outre, les parties II et III demandent de bien maîtriser les arguments physiques de base.

INDICATIONS

Première partie

- I.A.2 Penser à l'effet de peau.
- I.B.3 Utiliser les résultats de la question I.B.1 pour identifier trois régimes de fonctionnement. Vérifier que dans le régime linéaire on a bien, en convention récepteur, $U = -R_n I$.
- I.C.3 À quelle condition l'équation obtenue s'identifie-t-elle à celle de l'oscillateur harmonique non amorti ? Ne pas confondre solution sinusoïdale et solution oscillante.
- I.C.9 Penser au régime de fonctionnement de l'AO en saturation : le dispositif est-il toujours à résistance négative ?

Deuxième partie

- II.B.2.a Pour établir l'équation demandée, prendre le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday.
- II.B.3.c Le radar est basé sur la réflexion d'une onde électromagnétique sur le véhicule. La description de la *propagation* d'une telle onde est-elle possible dans le cadre des approximations formulées dans l'énoncé ?
- II.B.3.e Penser à l'induction et au fait qu'il y a des pertes par effet Joule.
- II.C.1.a Écrire les relations de passage à l'interface vide-conducteur pour les composantes normale et tangentielle du champ magnétique.
- II.C.2.b Que devient le courant pour $z \gg \delta$?

Troisième partie

- III.B.1 E_m est l'énergie magnétique stockée par l'inductance.
- III.C.1 Négliger les effets de bords afin d'assimiler le rectangle à deux inductances respectivement de longueur b et a .
- III.C.2 Évaluer l'intensité du champ créé par les N boucles et le comparer au champ créé par *une* boucle, puis calculer le flux *total* de ce champ à travers ces N boucles. Il est important de faire la différence entre ce dispositif et l'association d'inductances en série dans un circuit. Dans ce dernier cas, le terme de *mutuelle inductance* est systématiquement négligeable.
- III.D.1.c Comparer les propriétés de symétrie de \vec{B} et des problèmes C et D.
- III.D.2.a Exprimer la puissance volumique dissipée en fonction du courant volumique et du champ, et appliquer la loi d'Ohm.

Quatrième partie

- IV.A.2 Pour cette question et les suivantes, utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur.
- IV.C.1 Sur quelle entrée de l'AO la boucle de rétroaction est-elle branchée ?
- IV.E.2 Calculer la dérivée logarithmique de l'expression de f .

I. ÉTUDE DE L'OSCILLATEUR QUASI SINUSOÏDAL

I.A Phénomène de dissipation

I.A.1 Le câble conducteur est métallique. Certains électrons du métal sont libres de se déplacer dans le réseau d'atomes constituant le câble et sont responsables de l'apparition du courant électrique lorsqu'ils sont soumis à un champ \vec{E} . Les électrons, ne se déplaçant pas dans le vide mais dans un milieu matériel, cèdent régulièrement une partie de leur énergie cinétique au réseau cristallin lors de « collisions ». Cette énergie est dissipée sous forme de chaleur. C'est l'**effet Joule**. La densité volumique de courant est alors proportionnelle au champ électrique appliqué : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ (loi d'Ohm locale), où γ est la conductivité du matériau.

L'existence d'un temps caractéristique τ a pour conséquence la loi d'Ohm, puisqu'il est possible de dégager une vitesse moyenne des charges dans le conducteur, proportionnelle au champ et à τ .

Les collisions sont de différentes sortes. Par exemple, à température ambiante, dans un métal usuel parfaitement cristallisé, c'est l'interaction des électrons avec les *vibrations* du réseau cristallin qui engendre ces collisions, et non pas – comme le laisse penser une interprétation trop rapide du modèle de Drude – la collision façon « boule de billard » des électrons avec les atomes du réseau. En particulier, il en résulte une dépendance marquée de la résistance d'un métal avec la température. Les défauts d'un réseau cristallin, engendrés par des impuretés, ou les joints séparant deux régions cristallines, ont eux aussi pour effet d'introduire de nouvelles collisions.

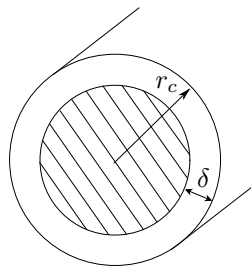
I.A.2 Montrons que R_b augmente avec la fréquence f . À fréquence élevée, l'effet de peau entraîne une localisation du courant au voisinage des bords du conducteur. Le courant pénètre dans le câble sur une certaine longueur, appelée **épaisseur de peau** δ , qui est proportionnelle à $f^{-1/2}$.

| Une démonstration de la relation entre δ et f est donnée dans la partie II.

Si S , ℓ et γ sont respectivement la section du câble où circule le courant, sa longueur et la conductivité du matériau dont il est constitué, la résistance R_b du câble varie selon

$$R_b = \frac{\ell}{\gamma S}$$

Pour un câble cylindrique de rayon r_c , la section S s'écrit $S = 2\pi r_c \delta$ pour $r_c \gg \delta$. La section S correspond à la partie non hachurée du dessin ci-contre. Il en résulte que $R_b \propto \sqrt{f}$ et donc, que



R_b croît avec f .

I.A.3 Considérons une boucle fermée (\mathcal{B}) dans le macadam. La loi de Lenz stipule que les variations du flux $\phi_{\mathcal{B}}$ du champ magnétique à travers (\mathcal{B}), créé par la boucle enterrée, engendrent l'apparition d'une f.é.m. induite $e = -d\phi_{\mathcal{B}}/dt$ dans (\mathcal{B}). Soit $M_{\mathcal{B}}$ le coefficient de mutuelle inductance entre la boucle enterrée et (\mathcal{B}), et I le courant circulant dans la boucle enterrée. En régime sinusoïdal ce courant s'écrit $I(t) = I_m \cos(2\pi ft)$. Alors, par définition de la mutuelle inductance,

$$\phi_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}} I_m \cos(2\pi ft)$$

et donc la f.é.m. induite dans le circuit est

$$e = 2\pi f M_{\mathcal{B}} I_m \sin(2\pi ft)$$

Appelons $R_{\mathcal{B}}$ la résistance de la boucle. Les pertes instantanées par effet Joule dans la boucle sont de la forme $\mathcal{P} = e^2/R_{\mathcal{B}}$, et s'écrivent donc

$$\mathcal{P} = \frac{M_{\mathcal{B}}^2}{R_{\mathcal{B}}} 4\pi^2 f^2 I_m^2 \sin^2(2\pi ft)$$

Les pertes moyennes $P = \langle \mathcal{P} \rangle_{\text{période}}$ peuvent se mettre sous la forme $GR I_m^2/2$. Or, $\langle \sin^2(2\pi ft) \rangle_{\text{période}} = 1/2$, il en résulte que

$$P = \frac{M_{\mathcal{B}}^2}{R_{\mathcal{B}}} 4\pi^2 f^2 I_m^2$$

si bien que

$$\boxed{GR \propto f^2}$$

I.B Simulation d'une résistance négative

I.B.1 En régime linéaire, les tensions d'entrée et de sortie de l'AO vérifient

- en entrée $V^+ = V^- (= V)$,
- en sortie $-V_{\text{sat}} \leq V_s \leq +V_{\text{sat}}$

De plus, l'AO étant supposé idéal, les courants i^+ et i^- en entrée de l'AO sont nuls. Le courant traversant R est donc I . La loi des mailles appliquée à la boucle incluant la résistance R donne

$$V - V_s = RI$$

Le courant traversant R_1 et R_2 s'écrit de deux façons différentes

$$I_2 = \frac{V_s}{R_1 + R_2} = \frac{V^+}{R_1} = \frac{V}{R_1}$$

Combinons ces deux relations pour obtenir

$$\boxed{V = -\frac{R R_1}{R_2} I} \quad \text{et} \quad \boxed{V_s = -\frac{R (R_1 + R_2)}{R_2} I}$$

I.B.2 La loi des mailles appliquée à la boucle contenant R donne immédiatement

$$V = RI + V_s$$

si bien que

$$V = \begin{cases} RI - V_{\text{sat}} & \text{si } V_s = -V_{\text{sat}} \\ RI + V_{\text{sat}} & \text{si } V_s = +V_{\text{sat}} \end{cases}$$

