X/ENS Maths PSI 2007 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Walter Appel (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Vincent Perrier (ENS Cachan) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Ce sujet a pour but de donner des méthodes pour déterminer une approximation numérique de deux réels : $\ln(2)$ et la constante d'Euler γ.

Il fait appel à la quasi totalité des techniques d'analyse du programme de l'année (à l'exception des séries de Fourier). Les séries numériques y tiennent une place de choix, notamment le critère de Leibniz sur les séries alternées. Mais d'autres méthodes sont aussi mises en œuvre : monotonie et convexité, séries de Taylor, polynômes de Tchebychev, développements limités, théorème de convergence dominée, dérivation de séries de fonctions, et même un peu de dénombrement et d'algorithmique.

Les cinq parties sont, dans l'ensemble, largement indépendantes.

- Dans une première partie, on étudie une série convergeant vers $\ln(2)$ et on estime sa vitesse de convergence. On étudie ensuite une suite convergeant vers γ, à laquelle on applique une méthode d'*accélération de convergence*.
- Dans la deuxième partie, la constante γ est approchée par une troisième suite, et la vitesse de convergence est estimée par une étude d'intégrales. On montre notamment que la convergence de cette méthode est encore plus rapide que celle de la première partie.
- La partie 3 permet de relier γ à une série alternée. Elle fait appel à quelques techniques de calcul intégral et de développement limité. Elle est d'un niveau très abordable.
- La quatrième partie, extrêmement technique par moments, relie $\ln(2)$ à la somme d'une série formée par des différences successives de termes de la série harmonique. Elle permet de montrer comment on peut accélérer très notablement la convergence de la série harmonique alternée vers $\ln(2)$. Une de ses difficultés est l'accumulation de notations auxquelles il faut s'habituer.
- La cinquième partie relie $\ln(2)$ à une dernière suite. On termine l'épreuve par l'étude d'un petit algorithme calculant les termes de cette suite, dont on peut montrer qu'il permet de calculer $\ln(2)$ avec une très grande précision et un nombre d'opérations remarquablement limité.

Au total, l'épreuve, bien que longue, est intéressante, variée, et permet de tester sa rapidité et son aisance face à une situation parfois délicate.

Indications

Première partie

1.3 Faire un dessin !

1.4 Former la différence $u_n - u_{n+1}$ et utiliser l'égalité des accroissements finis.

1.5 Utiliser la convexité de $t \mapsto 1/t$.

Deuxième partie

2.1 Poser $g_a : x \mapsto x\ln(1 - a/x)$, et montrer que g_a' est positive grâce à une étude de g_a''.

2.4 Poser $x = 1 - t/n$, puis développer $\ln(1 - x)$ en série entière.

2.7 Prouver que $\dfrac{1}{\mathrm{N}!} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{N}-1}}{\mathrm{N}^{\mathrm{N}}}$.

Troisième partie

3.1 Se placer sur un intervalle de la forme $[\,a\,;+\infty\,[$. La convergence uniforme sur $[\,a\,;+\infty\,[$ se montre en majorant uniformément le reste grâce au théorème des séries alternées.

3.2 La même technique s'emploie, mais à partir d'un certain rang seulement pour que la suite de terme général $\ln(n)/n^x$ décroisse.

3.3 Séparer les termes pairs des impairs.

3.4 Poser $\phi_n(t) = t^{-(s+1)}$ si $t > n$ et 0 sinon.

3.5 Ajouter $-t + t$ au numérateur dans l'intégrale pour faire apparaître la quantité bornée $\mathrm{E}(t) - t$.

3.6 Effectuer un développement limité de $(1 - 2^{1-s})$ et de $\zeta_a(s)$ au voisinage de 1.

Quatrième partie

4.1 Question classique mais inutile pour la suite !

4.2 Effectuer une récurrence.

4.4 Remarquer que la série (sur k) est télescopique.

4.5 Démontrer la propriété par récurrence sur m.

4.6 Écrire R_m sous la forme d'une somme double (dont une somme finie). Prouver que l'on peut intervertir ces deux sommes. Majorer ensuite la somme intérieure en utilisant le critère de Leibniz.

4.8 Question difficile ! Tout se simplifie en définissant par récurrence la suite $(\Delta^n f)_n$ de premier terme $\Delta^0 f = f$ et vérifiant

$$\Delta^{n+1} f : x \mapsto (\Delta^n f)(x) - (\Delta^n f)(x+1)$$

Montrer que $(-1)^k\,(\Delta^n f)^{(k)} \geqslant 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, par récurrence sur n.

Cinquième partie

5.2 Montrer que

$$\mathrm{T}_n = \mathrm{T}_{n-1} + 2\mathrm{X}\,\mathrm{T}_n$$

Vérifier ensuite que les fonctions $\mathrm{T}_n(1-2x)$ et $\mathrm{P}_n(x)$ vérifient la même relation de récurrence.

5.3 La question se résout par récurrence ; il vaut mieux cependant ne pas se focaliser sur ce calcul un peu pénible et se concentrer sur la suite.

5.4 Dans l'expression de Q_n, développer $(-1)^m - x^m$ en une somme de m termes.

5.5 Résoudre la relation de récurrence d'ordre 2 sur les coefficients $\mathrm{P}_n(-1)$. Montrer que

$$\mathrm{S} = \int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

5.6 Montrer que $d1$ prend les valeurs successives $\mathrm{P}_{k+2}(-1)$, et que c prend les valeurs $(-1)^k\,c_{n,k}$.

Première partie

1.1 La fonction $\psi : x \mapsto \ln(1+x)$ étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;+\infty[$, fixons un entier n et appliquons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n+1$. On calcule d'abord les dérivées successives de ψ par une récurrence immédiate : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\psi^{(k)} : x \longmapsto (-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$$

Puisque $\psi(0) = 0$, la formule de Taylor-Lagrange s'écrit donc, pour tout $x > -1$,

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\,x^k\right| \leqslant \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\sup_{t\in[\,0\,;x\,]}\left|\psi^{(n+2)}(t)\right|$$

Posons maintenant $x = 1$. Pour tout $k \geqslant 1$, la fonction $\left|\psi^{(k)}\right|$ est décroissante sur $[\,0\,;1\,]$; son maximum est donc en 0. Effectuons un glissement d'indice ; il vient

$$\left|\ln(2) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right| \leqslant \frac{(n+1)!}{(n+2)!} = \frac{1}{n+2}$$

Le majorant tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc le terme de gauche aussi.

$$\boxed{\ln(2) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} = \zeta_a(1)}$$

1.2 Considérons un réel $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire

$$\ln(2) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} + \mathrm{R}_n \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

Le théorème de Leibniz sur les séries alternées permet de majorer la valeur absolue du reste R_n d'ordre n par son premier terme : $|\mathrm{R}_n| < 1/(n+2)$.

> On pouvait également remarquer, si l'on avait fait la première question, que l'inégalité $|\mathrm{R}_n| \leqslant 1/(n+2)$ avait été démontrée directement en utilisant une formule de Taylor.

Il suffit de poser maintenant $n = \mathrm{E}\,(1/\varepsilon) - 1$. Alors, $n+2 = \mathrm{E}\,(1/\varepsilon) + 1 > 1/\varepsilon$, donc $|\mathrm{R}_n| < \varepsilon$. Une approximation de $\ln(2)$ à la précision ε est alors donnée par la somme partielle d'ordre n.

> Rappelons, puisque ce théorème sera utilisé tout au long de l'épreuve, le « théorème spécial des séries alternées », également appelé « critère des séries alternées » ou « critère de Leibniz ».
>
> Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de signe alterné, telle que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et de limite nulle. Alors, la série $\sum u_n$ converge. Si l'on note $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles et $(\mathrm{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ celle des restes, et S la somme de la série, alors $|\mathrm{S}| \leqslant |u_0|$ et $|\mathrm{S}_n| \leqslant |u_0|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, le signe de S_n et de S est le signe de u_0.