# Mines Maths 2 PSI 2007 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Pierre Bel (Doctorant en mathématiques) ; il a été relu par Jean Starynkévitch (Professeur en CPGE) et Paul Pichaureau (Professeur en CPGE).

---

Ce sujet porte sur la majoration du nombre défini pour $r \in \mathbb{R}^n$ par

$$\operatorname*{Inf}_{\alpha\in\mathbb{R}^n}\ \operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}} \left|\sum_{k=1}^{n} r_k \cos(k\,x - \alpha_k)\right|$$

Il est composé de 4 parties avec des questions étroitement liées.

- La première partie, d'un niveau modéré, porte sur la continuité et la dérivabilité de certaines fonctions.
- La deuxième partie est la plus difficile. Il s'agit de justifier de manière rigoureuse les hypothèses des théorèmes utilisés, en particulier pour les résultats sur les intégrales à paramètres. Elle utilise aussi les dérivées par rapport à un vecteur et les majorations d'intégrales.
- La troisième partie étudie le comportement de la fonction

  $$x \mapsto \left|\sum_{k=1}^{n} r_k \cos(k\,x - \alpha_k)\right|$$

  Elle demande un emploi de propriétés relativement fines sur la continuité des fonctions et utilise des majorations d'intégrales.
- La dernière partie est une synthèse qui fait appel aux résultats des autres parties.

Ce sujet permet de revoir et d'utiliser finement les résultats sur la continuité, les intégrales à paramètres et les encadrements d'intégrales, ce qui lui confère un niveau de difficulté élevé. Ce sujet difficile sera une bonne préparation aux concours.

# Indications

## Partie I

2 Étudier les limites de $\psi$ et de ses dérivées en $0^+$ et $0^-$.

## Partie II

4 Utiliser le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre et la question 3.

5 Utiliser le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre et les questions 3 et 4.

8 Utiliser la périodicité de la fonction pour se ramener à un compact.

9 Faire une étude locale de $\varepsilon \mapsto \mathrm{L}_{\widetilde{\alpha}}(\varepsilon, \beta)$ en utilisant un développement limité en 0 puis utiliser la question 7.

10 Expliciter la seconde inégalité de la question 9.

11 Distinguer $t = 1$ et $t > 1$. On utilisera l'inégalité (**1**) donnée par l'énoncé.

## Partie III

12 Penser pour la deuxième intégrale à utiliser le formulaire trigonométrique pour linéariser.

13 Utiliser la périodicité de la fonction pour se ramener à un compact.

14 Utiliser les questions 12 et 13.

15 Utiliser les résultats sur les intégrales de fonctions continues positives.

16 Utiliser les propriétés de l'image réciproque par une fonction continue.

17 Prendre $a = \max \mathrm{V}_\lambda^+ - 2\pi$.

18 L'énoncé comporte une erreur à cet endroit. L'égalité à démontrer est fausse. On peut néanmoins démontrer l'égalité

$$2(1-\lambda)\mathrm{S} = \left| \int_a^{x_\alpha} \frac{\partial \mathrm{P}_r}{\partial x}(x,\alpha)\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{x_\alpha}^{b} \frac{\partial \mathrm{P}_r}{\partial x}(x,\alpha)\,\mathrm{d}x \right|$$

qui permet de terminer le sujet. Utiliser la question 17 pour l'égalité et le résultat sur les intégrales donné en introduction du sujet pour l'inégalité.

19 Penser à utiliser le formulaire trigonométrique pour linéariser.

## Partie IV

20 Utiliser les questions 18 et 19 pour la première inégalité et une minoration appropriée de l'intégrale $\mathrm{I}_t(\widetilde{\alpha})$ pour la seconde.

21 Pour cette question de synthèse, prendre du recul par rapport à l'ensemble du sujet. Il faut utiliser les questions 1 et 20, introduire une fonction de $t$ et démontrer qu'elle est bornée.

# Majoration de polynômes trigonométriques

## I. Préliminaires

**1** La fonction $\varphi$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;1\,]$ par les règles de composition de fonctions et on a

$$\forall \lambda \in \,]\,0\,;1\,[ \qquad \begin{aligned}\varphi'(\lambda) &= 2\,t\,\lambda^{2t-1}(1-\lambda)^2 - 2\lambda^{2t}(1-\lambda)\\ &= 2\lambda^{2t-1}(1-\lambda)(t-(t+1)\lambda)\end{aligned}$$

Comme $\lambda^{2t-1}$ et $(1-\lambda)$ sont positifs sur $[\,0\,;1\,]$, le signe de $\varphi'(\lambda)$ est donné par celui de $(t-(t+1)\lambda)$ et on obtient alors le tableau de variation suivant pour $\varphi$

| $\lambda$ | $0$ | | $\dfrac{t}{1+t}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'(\lambda)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\varphi(\lambda)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\varphi\left(\dfrac{t}{1+t}\right)$ | $\searrow$ | $0$ |

D'où
$$\boxed{\max_{\lambda\in[\,0\,;1\,]} \varphi(\lambda) = \varphi\left(\frac{t}{t+1}\right) = \left(\frac{t}{t+1}\right)^{2t}\left(\frac{1}{t+1}\right)^{2}}$$

> Il faut bien dresser le tableau de variation de $\varphi$ pour trouver son maximum. Rappelons aux étourdis que le maximum d'une fonction sur un segment n'est pas nécessairement un point de dérivée nulle. Par exemple, la fonction $x \mapsto (\dfrac{1}{2}-x)^2$ admet son maximum sur $[\,0\,;1\,]$ en 0 et en 1. Par ailleurs, un point où la dérivée s'annule n'est pas nécessairement un maximum, comme le cas de la fonction $x \mapsto x^3$ sur $[\,-1\,;1\,]$.

**2** Par définition de la valeur absolue,

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \psi(x) = \begin{cases} x^{2t} & \text{si } x > 0\\ (-x)^{2t} & \text{si } x < 0\end{cases}$$

Par les règles de composition de fonctions, on en déduit que $\psi$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Comme $2t > 0$, on a

$$\lim_{x\to 0^+} \psi(x) = \lim_{x\to 0^-} \psi(x) = 0$$

La fonction est donc continue en zéro de valeur nulle en ce point.

Par suite $\boxed{\text{La fonction } \psi \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

En dérivant sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \psi'(x) = \begin{cases} 2t\,x^{2t-1} & \text{si } x > 0\\ -2t\,(-x)^{2t-1} & \text{si } x < 0\end{cases}$$

Comme $t \geqslant 1$, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} 2t\,x^{2t-1} = \lim_{x\to 0^-} 2t\,(-x)^{2t-1} = 0$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \psi'(x) = 0$. La fonction $\psi$ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée admet une limite en 0. D'après le théorème sur le prolongement de la dérivée, on en déduit que $\psi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\psi'(0) = 0$.
En dérivant une seconde fois sur $\mathbb{R}^*$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \psi''(x) = \begin{cases} 2t\,(2t-1)\,x^{2t-2} & \text{si } x > 0 \\ 2t\,(2t-1)(-x)^{2t-2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Distinguons les cas $t > 1$ et $t = 1$.

- **Si $t > 1$**, on a alors

$$\lim_{x\to 0^+} 2t(2t-1)\,x^{2t-2} = 0 = \lim_{x\to 0^-} 2t(2t-1)\,(-x)^{2t-2}$$

  Les limites à gauche et à droite en 0 de la fonction dérivée seconde sont donc les mêmes. En utilisant de nouveau le théorème sur la limite de la dérivée, on constate que $\psi'$ est dérivable en 0 et de dérivée nulle en ce point.
- **Si $t = 1$**, on a alors $\psi(x) = x^2$ qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\psi''(0) = 2$.

Dans les deux cas, on en conclut que

$$\boxed{\text{La fonction } \psi \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

En utilisant cette propriété sur le calcul de $\psi'$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x\,|x| = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0 \\ -x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

on en déduit

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \psi'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x\,|x|} 2t\,x^{2t-1} & = \quad 2t\,x\,|x|^{2t-2} \quad \text{si } x > 0 \\ \dfrac{x^2}{x\,|x|} 2t\,(-x)^{2t-1} & = \quad 2t\,x\,|x|^{2t-2} \quad \text{si } x < 0 \end{cases}$$

d'où

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} \forall x \in \mathbb{R} & \psi'(x) & = & 2t\,x\,|x|^{2t-2} \\ & \psi''(x) & = & 2t(2t-1)\,|x|^{2t-2} \end{array}}$$

**3** La fonction $h$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et la question 2 montre que $\psi$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Par les règles de composition de fonctions, on a

$$\boxed{\ell = \psi \circ h \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

D'après la formule de dérivation, on a

$$\begin{array}{lrcl} \forall x \in \mathbb{R} & \ell'(x) & = & \psi'(h(x))h'(x) \\ & \ell''(x) & = & \psi''(h(x))h'(x)^2 + \psi'(h(x))h''(x) \end{array}$$

On conclut en utilisant la question 2

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} \forall x \in \mathbb{R} & \ell'(x) & = & 2t\,h(x)\,|h(x)|^{2t-2}\,h'(x) \\ & \ell''(x) & = & 2t(2t-1)\,|h(x)|^{2t-2}\,(h'(x))^2 + 2t\,h(x)\,|h(x)|^{2t-2}\,h''(x) \end{array}}$$