Centrale Maths 1 PSI 2007 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Dujardin (ENS Cachan) ; il a été relu par Philippe Bouafia (ENS Ulm) et Vincent Perrier (ENS Cachan).

Ce sujet traite des solutions de l'équation différentielle autonome du second ordre

$$x'' + f'(x) = 0$$

où f est une fonction « potentiel » paire de classe $\mathscr{C}^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Un point de vue physique est vite adopté, favorisant la considération du système différentiel d'ordre 2 canoniquement associé :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -f'(x) \end{cases} \tag{S}$$

et la résolution dans le « plan de phase » $\mathbb{R}^2$.

L'étude est menée en quatre parties :

- La première partie est consacrée à l'étude de deux exemples de familles de solutions obtenues pour deux fonctions « potentiel » distinctes. On obtient notamment des familles de trajectoires dans le plan de phase composées dans un cas d'ellipses concentriques (oscillateur harmonique) et dans l'autre, de branches d'hyperboles. Cette partie permet de se familiariser avec les objets qui seront manipulés de manière plus abstraite dans les parties suivantes.
- La deuxième partie consiste en l'étude de quelques propriétés générales des trajectoires pour une fonction f « quelconque ». On résout notamment localement le système (S) dans le demi-plan supérieur et l'on distingue trois comportements qualitatifs significatifs des solutions, que l'on utilisera par la suite.
- La troisième partie est consacrée à l'étude du système (S) linéarisé au voisinage d'un point d'équilibre. On y introduit notamment une notion de stabilité des points d'équilibre. Enfin, on démontre un résultat qualitatif pour les solutions au voisinage d'un point d'équilibre stable.
- La dernière partie étudie deux exemples non linéaires (où la fonction f n'est pas quadratique) : d'une part le pendule non linéaire classique, d'autre part une forme de pendule non linéaire perturbé. On s'intéresse notamment aux points d'équilibre de ces systèmes.

Cette épreuve, plutôt longue pour quatre heures de composition, présente l'intérêt d'être motivée par des problèmes physiques et de faire ainsi appel à l'intuition. En revanche, elle présente l'inconvénient de comporter plusieurs erreurs d'énoncé que nous pointerons dans ce corrigé. En outre, un certain nombre de notions sont définies de manière imprécise et peuvent conduire à des confusions ; par exemple, la définition du mot « trajectoire » utilise des solutions de l'équation, alors qu'elle devrait uniquement faire intervenir des solutions maximales de l'équation.

En conclusion, cette épreuve est une excellente occasion de se frotter à la réalité des épreuves de concours, qui ne sauraient être toujours parfaites.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Indications

2 Introduire la fonction $\mathrm{E}(t) = (y(t))^2/2 + f(x(t))$. Montrer qu'elle est dérivable sur l'intervalle sur lequel est définie la solution. Calculer sa dérivée sur cet intervalle.

I.A.1 Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $x'' + \omega^2 x = 0$ d'énergie $h > 0$.

I.A.2 Déterminer la trajectoire associée à une solution de (S) d'énergie $h > 0$ définie sur $\mathbb{R}$.

I.A.3 Utiliser le résultat de la question préliminaire 2.

I.B.1 Écrire et résoudre l'équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants vérifiée par la fonction x.

I.B.3 Utiliser la question I.B.1.

II.A.3 Exprimer $(\tau^{-1})'$ en fonction de τ^{-1} sur l'intervalle $\mathrm{J}(x_0)$. Utiliser ensuite le théorème de Cauchy-Lipschitz rappelé dans l'énoncé.

II.B Justifier que ψ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathrm{J}(x_0)$ et y calculer sa dérivée.

II.C.1 Si $\alpha < u$ ou $v < \beta$, montrer que J_1 n'est pas maximal.

II.E.1.a Utiliser la continuité de f en a et b, puis le fait qu'elle admet un développement limité d'ordre 1 en a et b. Enfin, chercher un équivalent de la fonction sous le signe intégral définissant τ.

II.E.1.b Que vaut $\mathrm{F}(\Psi(t))$ sur $]\,\alpha\,;\beta\,[$? Utiliser ensuite le théorème « de prolongement d'une dérivée ».

II.E.1.c Utiliser la question II.E.1.b.

II.E.2 Donner un équivalent de la fonction $u \mapsto (h - f(u))^{-1/2}$ pour u proche de a.

III.B Se ramener à la résolution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

III.C Utiliser le résultat de la question précédente.

III.D.1 Utiliser le fait que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec $f(e) = f'(e) = 0$ et $f''(e) > 0$.

III.D.2 Attention à l'erreur d'énoncé : la limite commune de $x^+(h)$ et $x^-(h)$ quand h tend vers 0^+ est e et non 0. Montrer que $\mathrm{H} = \min\big(f(c), f(d)\big)$ convient.

III.D.3 Montrer que pour $\mathrm{R} > 0$ suffisamment petit, toute solution de donnée initiale $\mathrm{X}_0 \in \mathrm{B}(\mathrm{E}, \mathrm{R}) \in \mathrm{P}^+$ est de type II.E.1.

III.E.1 L'énoncé comporte une erreur : ne pas tenir compte du v.

III.E.2 Utiliser à la fois l'expression de h_n montrée à la question précédente et le développement limité de f en e.

III.E.3 A l'aide de la question précédente et de la question III.D.3, se ramener à appliquer le théorème de convergence dominée à une famille d'intégrales. Pour cela, utiliser deux fois la formule de Taylor avec reste intégral afin de majorer sur $]\,0\,;1\,[$ la suite de fonctions $v \mapsto \big((1 - v^2)f''(e) + \varepsilon_n(v)\big)^{-1/2}$ par une fonction intégrable sur $]\,0\,;1\,[$ indépendamment de n. Cette question est de loin la plus technique du sujet.

IV.B Montrer que toute trajectoire d'énergie $h \in\,]\,0\,;1\,[$ est du type II.E.1.

IV.C Montrer que $a = -\infty$ et $b = +\infty$ et que ces points sont de type II.E.3.

IV.D.1 Montrer que $a = -\pi$ et $b = \pi$ alors que $\alpha = -\infty$ et $\beta = +\infty$.

IV.D.3 On pourra montrer que $\mathrm{F}^{-1}(\{1\})$ sépare le plan en deux parties : $\mathrm{F}^{-1}\,([\,0\,;1\,[)$ et $\mathrm{F}^{-1}\,(]\,1\,;+\infty\,[)$.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Questions préliminaires

1 Si $t \mapsto \gamma(t)$ est une trajectoire du système (S) définie sur un intervalle I contenant t_0, alors la fonction γ est dérivable sur I et l'on a

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \gamma'(t) = \Phi(\gamma(t))$$

Puisque la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, le champ Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. En particulier, le champ Φ est continu sur $\mathbb{R}^2$. Par conséquent, l'application γ' est continue sur I. Par suite, γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Soit $t \in \mathrm{I}$ tel que $\Phi(\gamma(t)) \neq 0$. Il vient que $\gamma'(t) \neq 0$. On en déduit que la trajectoire γ admet une tangente en $\gamma(t)$ et que cette tangente est dirigée par le vecteur $\gamma'(t)$. Finalement,

$$\boxed{\text{En tout point } \gamma(t) \text{ tel que } \Phi(\gamma(t)) \neq 0, \text{ la trajectoire } \gamma \text{ admet une tangente dirigée par le vecteur } \Phi(\gamma(t)).}$$

2 Considérons $t \mapsto \mathrm{X}(t)$ une solution de (S) définie sur un intervalle I contenant t_0. La fonction X est dérivable sur I et l'on a

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -f'(x(t)) \end{cases}$$

En particulier, les fonctions x et y sont dérivables sur l'intervalle I.

Considérons la fonction définie sur I par

$$\mathrm{E}(t) = \mathrm{F}(\mathrm{X}(t)) = \frac{y^2(t)}{2} + f(x(t))$$

et remarquons que la fonction E est elle aussi dérivable sur l'intervalle I. En outre,

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{E}'(t) = y'(t)y(t) + x'(t)f'(x(t)) = y'(t)x'(t) + x'(t)(-y'(t)) = 0$$

car $t \mapsto \mathrm{X}(t)$ est une solution de (S) sur I. Par suite,

$$\boxed{\text{La fonction d'énergie F est constante le long des solutions de (S).}}$$

I. Premiers exemples

I.A.1 La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En outre, pour tout réel x, $f'(x) = \omega^2 x$. L'équation $x'' + f'(x) = 0$ s'écrit donc

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. D'après le cours, cette équation admet des solutions sur $\mathbb{R}$. En outre, pour toute solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation, il existe deux constantes réelles A et φ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = \mathrm{A}\cos(\omega t + \varphi)$$

> L'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants
>
> $$x'' + \omega^2 x = 0$$
>
> admet, d'après le cours, des solutions sur tout intervalle de $\mathbb{R}$. On ne considère ici que les solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

> Il est important par ailleurs de bien connaître le cours (y compris les formules du cours de première année) afin de se distinguer positivement des autres candidats. Le rapport du jury relatif à cette épreuve indique par exemple : « Dans un certain nombre de copies, les candidats proposent des formules fausses pour la solution générale de l'équation $x'' = kx$. ».

Soit x une fonction définie sur $\mathbb{R}$ solution de cette équation différentielle et d'énergie $h > 0$. On peut écrire, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\frac{(x'(t))^2}{2} + \frac{\omega^2}{2}x^2(t) &= \frac{1}{2}\left((-\mathrm{A}\omega\sin(\omega t+\varphi))^2 + \omega^2\left(\mathrm{A}\cos(\omega t+\varphi)\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{A}^2\omega^2 \\
\frac{(x'(t))^2}{2} + \frac{\omega^2}{2}x^2(t) &= h
\end{aligned}$$

Ceci implique $$|\mathrm{A}| = \frac{\sqrt{2h}}{\omega}$$

Par suite (quitte à changer φ en $\pi + \varphi$), la fonction x est de la forme

$$t \mapsto \frac{\sqrt{2h}}{\omega}\cos(\omega t + \varphi)$$

On vérifie, réciproquement, que pour $h > 0$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = \frac{\sqrt{2h}}{\omega}\cos(\omega t + \varphi)$$

est une solution d'énergie h de l'équation $x'' + \omega^2 x = 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Ainsi,

> Les solutions de l'équation $x'' + \omega^2 x = 0$ d'énergie $h > 0$ définies sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme
> $$t \mapsto \frac{\sqrt{2h}}{\omega}\cos(\omega t + \varphi)$$
> Elles sont toutes périodiques de période $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

I.A.2.a Soit x une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $x'' + \omega^2 x = 0$ d'énergie $h > 0$. La question précédente assure l'existence d'un réel φ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = \frac{\sqrt{2h}}{\omega}\cos(\omega t + \varphi)$$

Par conséquent $\qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = x'(t) = -\sqrt{2h}\sin(\omega t + \varphi)$

On en déduit que cette solution d'énergie $h > 0$ décrit l'intégralité de l'ellipse de centre l'origine O du plan P, d'axes les axes de coordonnées, et de demi-axes $\sqrt{2h}/\omega$ suivant (Ox) et $\sqrt{2h}$ suivant (Oy). En conclusion,

> Toute solution d'énergie $h > 0$ définie sur $\mathbb{R}$ décrit dans P l'ellipse Γ_h de centre l'origine, d'axes les axes de coordonnées, et de demi axes respectifs $\sqrt{2h}/\omega$ suivant (Ox) et $\sqrt{2h}$ suivant (Oy). Une équation cartésienne de Γ_h est
> $$\frac{x^2}{\left(\sqrt{2h}/\omega\right)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2h})^2} = 1$$

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .