X Physique 1 PC 2007 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Arnaud Riegert (ENS Ulm) ; il a été relu par Jean-Julien Fleck (Professeur en CPGE) et David Chapot (Professeur agrégé).

Ce sujet traite d'un mouvement saccadé, le « collé-glissé », observé sous certaines conditions dans les systèmes mettant en jeu des forces de frottement et dû à la différence entre les valeurs des coefficients de frottement statique et cinématique d'une surface sur une autre.

- La première partie permet de comprendre l'alternance de phases « collées » et « glissées ». On analyse le mouvement d'une poutre posée sur deux supports qui se rapprochent à vitesse constante ; la poutre glisse alternativement sur un support puis sur l'autre.
- La deuxième partie est consacrée à l'étude des oscillations d'une masse accrochée à un ressort qui repose sur un tapis roulant. On envisage deux types de cycles d'oscillation : l'un avec une phase de collage, l'autre sans. L'analyse du mouvement s'effectue à partir du tracé d'un portrait de phase.
- Dans la troisième partie, on s'intéresse au « chant des verres » que l'on entend lorsque l'on passe un doigt sur le bord de certains verres ; le mouvement « collé-glissé » entretient la vibration du verre qui est à l'origine de ce son.

Ce court sujet est assez difficile et peu conventionnel. La première partie, qui fait appel à des concepts simples en apparence, exige des raisonnements méthodiques dans lesquels le candidat est peu ou pas guidé. Par ailleurs, l'utilisation répétée de portraits de phase dans la deuxième partie peut déstabiliser ceux qui ne sont pas familiers avec ces techniques. Enfin, le calcul de l'énergie potentielle élastique du verre dans la troisième partie nécessite de bien distinguer les tailles des éléments mésoscopiques étudiés ainsi que celles de leurs déformations infinitésimales.

Indications

Partie I

I.1 Appliquer à la poutre le principe fondamental de la dynamique et le théorème du moment cinétique.

I.3 Écrire les (in)égalités données par les lois de Coulomb dans chacun des deux cas possibles et repérer la condition la plus restrictive en gardant à l'esprit que $a_0 < \mathrm{D}_0/2$ et $\mathrm{R}_{\mathrm{N}1} > \mathrm{R}_{\mathrm{N}2}$.

I.4 Jusqu'à quel instant l'inégalité $|\mathrm{F}_1(t)| \leqslant |\mathrm{R}_{\mathrm{N}1}(t)|$ est-elle vérifiée ?

I.5 Remarquer que la poutre ne peut pas ne plus glisser sur le support 2 : sinon, son accélération dans le référentiel du laboratoire serait infinie. Calculer les forces de frottement $\mathrm{F}_1(t)$ et $\mathrm{F}_2(t)$ pendant la phase où la poutre glisse sur les deux supports. Remarquer que cette phase cesse lorsque la vitesse de glissement s'annule sur l'un des deux supports.

I.6 Ne pas refaire de calcul mais remarquer que la situation est identique à celle traitée dans les questions I.3 et I.4 si l'on permute les supports 1 et 2.

Partie II

II.2 Calculer la vitesse de glissement $\overrightarrow{v_{\mathrm{g}}}$ de la masse sur le tapis et en déduire l'expression de la force de frottement selon le sens de $\overrightarrow{v_{\mathrm{g}}}$. Pour la phase de collage, l'inégalité sur la norme de la force de frottement donnée par la loi de Coulomb permet d'obtenir un encadrement de X.

II.3 Noter que le mouvement se maintient si la vitesse $\dot{\mathrm{X}}$ reste inférieure à v_0.

II.5 Calculer aussi q'' pour obtenir des équations différentielles sur q. Les conditions initiales proposées correspondent au cas étudié à la question II.3. Remarquer alors que $q^2 + {q'}^2 = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$.

II.8 À l'aide du portrait de phase, distinguer les deux phases du mouvement. La phase de collage correspond au parcours d'une distance à déterminer à la vitesse v_0 ; la phase de glissement est représentée par un ou plusieurs arcs de cercle s'appuyant sur la droite $q' = 1$ et parcourus à la vitesse angulaire ω.

II.9 La puissance dissipée par les forces de frottement $\overrightarrow{f}$ s'exprime en fonction de la vitesse de glissement grâce à $\mathcal{P} = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v_{\mathrm{g}}}$. Intégrer $\mathcal{P}$ sur le cycle limite et diviser par la durée du cycle pour obtenir la puissance moyenne.

Partie III

III.1.3 S'il n'y a pas d'amortissement, l'énergie se conserve, donc $\mathrm{dE}/\mathrm{d}t = 0$.

III.2.1 Si $a \ll \mathrm{R}$, on peut assimiler le volume de la coque à la surface coupée multipliée par a.

III.3.1 Le filament est un arc de rayon $\mathrm{R} + u$; il est intercepté par le même angle que la ligne centrale de longueur ℓ_0 et de rayon R.

III.3.3 La force de tension dans le matériau est tangente au filament. Envisager une variation $\mathrm{d}\delta r$ de la déformation ; elle provoque une variation $\mathrm{d}\delta\ell$ de la longueur du filament. Supposer pour simplifier que chaque extrémité du filament est déplacée d'une longueur $\mathrm{d}\delta\ell/2$ parallèlement à la force de tension orthoradiale et calculer le travail $\delta\mathrm{W}$ de cette force de tension pour le déplacement $\mathrm{d}\delta\ell/2$; en déduire l'énergie potentielle de l'élément de fil par $\delta\mathrm{W} = -\mathrm{dE_p}$.

III.3.4 Remarquer que $\delta r'' = -4\,\delta r$.

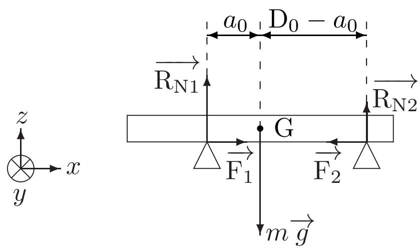
Analyse d'un mouvement « collé-glissé » (stick-slip) et de l'une de ses conséquences, le chant des verres

I. Principe du mouvement « collé-glissé »

I.1 On introduit les axes Oy et Oz tels que (Ox, Oy, Oz) forme un trièdre direct et que Oz soit orienté verticalement vers le haut. La poutre est soumise :

- à son poids $\overrightarrow{\mathrm{P}} = m\,\overrightarrow{g} = -m\,g\,\overrightarrow{e_z}$;
- à la réaction $\overrightarrow{\mathrm{R}_1} = \mathrm{F}_1\,\overrightarrow{e_x} + \mathrm{R}_{\mathrm{N}1}\,\overrightarrow{e_z}$ du support 1 où F_1 et $\mathrm{R}_{\mathrm{N}1}$ désignent respectivement les composantes normale et tangentielle de $\overrightarrow{\mathrm{R}_1}$;
- à la réaction $\overrightarrow{\mathrm{R}_2} = \mathrm{F}_2\,\overrightarrow{e_x} + \mathrm{R}_{\mathrm{N}2}\,\overrightarrow{e_z}$ du support 2.

Les forces normales $\mathrm{R}_{\mathrm{N}1}$ et $\mathrm{R}_{\mathrm{N}2}$ sont positives et le restent au cours du mouvement tant que le contact entre la poutre et le support est maintenu.



La somme des forces appliquées à la poutre est nulle ; par projection sur $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_z}$, on obtient respectivement

$$\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 = 0$$

et

$$\mathrm{R}_{\mathrm{N}1} + \mathrm{R}_{\mathrm{N}2} - m\,g = 0 \qquad (\mathbf{1})$$

Le théorème du moment cinétique appliqué à la poutre dans le référentiel du laboratoire par rapport à l'axe Gy s'écrit par ailleurs

$$\frac{\mathrm{dL}_{\mathrm{G}y}}{\mathrm{d}t} = 0 = a_0\,\mathrm{R}_{\mathrm{N}1} - (\mathrm{D}_0 - a_0)\,\mathrm{R}_{\mathrm{N}2} - \frac{\sqrt{s}}{2}\,(\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2)$$

soit

$$a_0\,\mathrm{R}_{\mathrm{N}1} = (\mathrm{D}_0 - a_0)\,\mathrm{R}_{\mathrm{N}2} \qquad (\mathbf{2})$$

En effet, les forces de frottement ont le même bras de levier $\sqrt{s}/2$ par rapport au point G car la poutre possède une section carrée de surface s. En combinant les équations (**1**) et (**2**), il vient finalement

$$\boxed{\mathrm{R}_{\mathrm{N}1} = \frac{\mathrm{D}_0 - a_0}{\mathrm{D}_0}\,m\,g \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R}_{\mathrm{N}2} = \frac{a_0}{\mathrm{D}_0}\,m\,g}$$

> Attention : les moments des forces qui sont comptés positivement sont ceux qui tendent à faire tourner la poutre autour de l'axe Gy selon la règle du tire-bouchon de Maxwell, c'est-à-dire dans le sens horaire sur la figure.

I.2 Le point G est maintenant animé d'une vitesse $(\dot{a}(t)+v_0/2)\,\overrightarrow{e_x}$ dans le référentiel du laboratoire et il possède une accélération $\ddot{a}(t)\,\overrightarrow{e_x}$. Le principe fondamental de la dynamique en projection sur les axes Ox et Oz donne alors les équations

$$m\,\ddot{a}(t) = \mathrm{F}_1(t) + \mathrm{F}_2(t)$$

$$0 = \mathrm{R}_{\mathrm{N}1}(t) + \mathrm{R}_{\mathrm{N}2}(t) - m\,g \qquad (\mathbf{3})$$

Par ailleurs, le moment cinétique de la poutre reste nul car celle-ci ne se déplace qu'en translation horizontale ; le théorème du moment cinétique donne alors

$$a(t)\,\mathrm{R}_{\mathrm{N}1}(t) - [\mathrm{D}(t) - a(t)]\;\mathrm{R}_{\mathrm{N}2}(t) - \frac{\sqrt{s}}{2}\;[\mathrm{F}_1(t) + \mathrm{F}_2(t)] = 0$$

soit
$$a(t)\,\mathrm{R}_{\mathrm{N}1}(t) - [\mathrm{D}(t) - a(t)]\;\mathrm{R}_{\mathrm{N}2}(t) = \frac{\sqrt{s}}{2}\,m\,\ddot{a}(t) \qquad (\mathbf{4})$$

Les équations (**3**) et (**4**) forment un système linéaire de deux équations à deux inconnues ($\mathrm{R}_{\mathrm{N}1}$ et $\mathrm{R}_{\mathrm{N}2}$) qui se résout en

$$\boxed{\begin{cases} \mathrm{R}_{\mathrm{N}1}(t) = \dfrac{m\,g\;[\mathrm{D}(t) - a(t)] + m\,\ddot{a}(t)\,\sqrt{s}/2}{\mathrm{D}(t)} \\[2ex] \mathrm{R}_{\mathrm{N}2}(t) = \dfrac{m\,g\,a(t) - m\,\ddot{a}(t)\,\sqrt{s}/2}{\mathrm{D}(t)} \end{cases}}$$

> On peut s'attendre, d'une part, à ce que la poutre soit de petite épaisseur et, d'autre part, à ce que l'accélération du point G soit au plus du même ordre de grandeur que g ; dans ces conditions, il semble légitime de négliger le terme $m\,\ddot{a}(t)\,\sqrt{s}/2$ par rapport aux autres. On retrouve alors les expressions de la question précédente en remplaçant a_0 et D_0 par $a(t)$ et $\mathrm{D}(t)$.

I.3 Si la poutre reste fixe par rapport à l'un des deux supports, son centre de gravité se déplace à la vitesse $v_0/2$ dans le référentiel du laboratoire et son accélération est nulle ; on a donc nécessairement $\mathrm{F}_1(t) + \mathrm{F}_2(t) = 0$. Si la poutre est fixe par rapport au support 1, les lois de Coulomb permettent d'écrire $|\mathrm{F}_2(t)| = \mu_{\mathrm{C}}\,\mathrm{R}_{\mathrm{N}2}(t)$ et $|\mathrm{F}_1(t)| \leqslant \mu_{\mathrm{S}}\,\mathrm{R}_{\mathrm{N}1}(t)$; comme, de plus, $|\mathrm{F}_1(t)| = |\mathrm{F}_2(t)|$, on a

$$\frac{\mathrm{R}_{\mathrm{N}2}(t)}{\mathrm{R}_{\mathrm{N}1}(t)} \leqslant \frac{\mu_{\mathrm{S}}}{\mu_{\mathrm{C}}}$$

Inversement, si la poutre est immobile par rapport au support 2, on obtient de même

$$\frac{\mathrm{R}_{\mathrm{N}1}(t)}{\mathrm{R}_{\mathrm{N}2}(t)} \leqslant \frac{\mu_{\mathrm{S}}}{\mu_{\mathrm{C}}}$$

Or, à l'instant initial, $\mathrm{R}_{\mathrm{N}2} \leqslant \mathrm{R}_{\mathrm{N}1}$ (car $a_0 < \mathrm{D}_0/2$). La première condition est ainsi réalisée (car $\mu_{\mathrm{S}} > \mu_{\mathrm{C}}$), ce qui n'est pas nécessairement le cas de la seconde.

$$\boxed{\text{Par conséquent, la poutre glisse par rapport au support 2.}}$$

La distance $a(t)$ reste égale à a_0 de sorte que $\mathrm{R}_{\mathrm{N}2}(t) = a_0\,m\,g/(\mathrm{D}_0 - v_0\,t)$. La poutre possède une vitesse de glissement $v_0\,\overrightarrow{e_x}$ par rapport au support 2 et $\overrightarrow{\mathrm{F}_2}$ est donc dirigée selon $-\overrightarrow{e_x}$. De plus, d'après les lois de Coulomb $|\mathrm{F}_2(t)| = \mu_{\mathrm{C}}\,\mathrm{R}_{\mathrm{N}2}(t)$ d'où

$$\boxed{\mathrm{F}_2(t) = -\frac{\mu_{\mathrm{C}}\,a_0\,m\,g}{\mathrm{D}_0 - v_0\,t}}$$

Puisque $\mathrm{F}_1 = -\mathrm{F}_2$,
$$\boxed{\mathrm{F}_1(t) = \frac{\mu_{\mathrm{C}}\,a_0\,m\,g}{\mathrm{D}_0 - v_0\,t}}$$