Mines Physique 1 PC 2007 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Alban Sauret (ENS Lyon) ; il a été relu par Georges Rolland (Professeur agrégé) et Emmanuel Bourgeois (ENS Lyon).

Cette épreuve est centrée sur l'étude générale d'une corde ; elle est divisée en cinq parties que l'on peut regrouper en deux grands thèmes indépendants.

- Dans un premier temps, on s'intéresse à la cinématique d'une corde posée sur un support, puis à sa dynamique, ce qui permet d'introduire la notion de poids apparent. Puis on étudie la chute de la corde d'une table. Cette partie est assez calculatoire et nécessite des notions sur les paraboles. Ces trois premières parties sont liées et assez délicates à traiter. Elles ne nécessitent que peu de connaissances de cours, mais exigent de réfléchir très précisément aux systèmes et aux forces à envisager pour mener à bien leur résolution.
- Le second thème, plus facile, porte sur l'étude des vibrations d'une corde verticale fixée à ses deux extrémités et traite des ondes qui peuvent se propager le long d'une corde fixée à une seule extrémité. Cette partie est proche du cours et des exercices types sur les ondes mécaniques.

Cette épreuve comporte des questions assez difficiles à cerner tandis que d'autres sont beaucoup plus abordables. L'énoncé peut parfois être difficile à comprendre et l'épreuve est plutôt longue pour une durée de trois heures. Il peut être judicieux de commencer par les deux dernières parties.

Indications

Partie A

1 Appliquer la définition du centre de masse en séparant les deux parties de corde : verticale et horizontale.

3 Effectuer le même raisonnement qu'aux questions 1 et 2. Il ne faut pas tenir compte de la notation de G_2 introduite en préambule.

4 Il y a ici une erreur dans l'énoncé : il faut supposer que la corde est initialement en tas et non étalée.

5 La corde finit de chuter quand le point B touche la table.

Partie B

8 Utiliser le résultat de la question 6.

10 Effectuer un bilan des forces sur la portion élémentaire de corde autour du point B.

11 Utiliser la question 2, en prenant garde à l'orientation de l'axe vertical.

Partie C

12 Raisonner sur des systèmes ouverts. Effectuer un bilan de quantité de mouvement pour la partie de corde horizontale puis pour la partie de corde verticale.

15 Se ramener à une équation de conique connue.

18 Utiliser la loi de composition des vitesses pour déterminer les vitesses dans le référentiel barycentrique.

19 Il y a ici une erreur dans l'énoncé, il faut trouver une différence d'énergie nulle en accord avec le théorème de König relatif à l'énergie cinétique.

Partie D

22 Résoudre l'équation de d'Alembert en effectuant une séparation des variables.

Partie E

25 Effectuer un raisonnement analogue à la question 20.

26 Prendre en compte la contribution du poids.

28 Injecter la solution pour x dans l'équation de propagation de l'onde puis écrire la relation de dispersion.

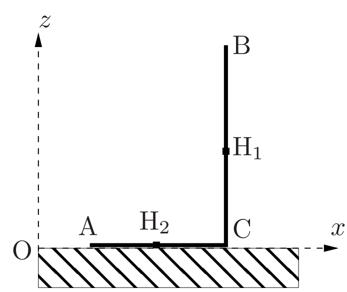
33 La moyenne temporelle pour le produit de deux grandeurs complexes $\underline{a}$ et $\underline{b}$ s'écrit $1/2\,\mathrm{Re}\,(\underline{a} \cdot \underline{b}^\star)$. Remarquer que l'énergie mécanique de la corde augmente.

Corde pesante et vibrante

A. Étude cinématique d'un mouvement bidirectionnel

Première expérience

1 Le centre de masse de la corde est égal au barycentre des centres de masse de la partie verticale et de la partie horizontale. Étant donné que la masse linéique de la corde μ est constante, on a



$$\mu \mathrm{L}\,\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \mu z\,\overrightarrow{\mathrm{OH}_1} + \mu(\mathrm{L}-z)\,\overrightarrow{\mathrm{OH}_2}$$

où H_1 est le centre de masse de la partie verticale (CB), H_2 le centre de masse de la partie horizontale (CA) et z l'ordonnée du point B.

Puisque $\overrightarrow{\mathrm{OH}_1} = z/2\,\overrightarrow{e_z}$ et que $\overrightarrow{\mathrm{OH}_2}$ est selon $\overrightarrow{e_x}$, il vient, en projection suivant (Oz)

$$\mathrm{Z}(\mathrm{G}_1) = \frac{z}{\mathrm{L}}\,\mathrm{Z}(\mathrm{H}_1)$$

soit

$$\boxed{\mathrm{Z}(\mathrm{G}_1) = \frac{1}{2}\frac{z^2}{\mathrm{L}}}$$

Cette relation est valable tant que la corde est en contact avec la table.

> On obtient l'ordonnée du centre de masse de la corde en écrivant
> $$\mathrm{Z}(\mathrm{G}_1) = \overrightarrow{\mathrm{OG}_1}.\overrightarrow{e_z} = \frac{1}{\mathrm{L}}\int_0^z u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\frac{z^2}{\mathrm{L}}$$
> Le centre de masse n'est pas sur la corde. De plus, son ordonnée ne dépend pas de la façon dont la corde s'étale sur la table, à l'inverse de son abscisse.

2 L'ordonnée de B s'écrit $z = v_0 t$, ainsi on a

$$\mathrm{Z}(\mathrm{G}_1) = \frac{1}{2}\frac{{v_0}^2\,t^2}{\mathrm{L}} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{Z}(\mathrm{G}_1)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{{v_0}^2}{\mathrm{L}}$$

La composante verticale de l'accélération de G_1 est constante et vaut

$$\boxed{\overrightarrow{a}(\mathrm{G}_1).\overrightarrow{e_z} = \frac{{v_0}^2}{\mathrm{L}} = \mathrm{C^{te}}}$$

> Il ne faut pas confondre le vecteur accélération de G_1 et sa composante verticale, en effet le mouvement de la corde impose $\overrightarrow{a}(\mathrm{G}_1).\overrightarrow{e_x} \neq 0$. Il faut donc faire attention aux notations de l'énoncé.

3 Le point G_2 est la position de G lors de la descente de la corde.

> La notation proposée par l'énoncé n'est vraiment pas claire. En effet, elle ne correspond pas à la situation décrite dans le préambule de cette partie.

La vitesse des points de la corde au contact avec la table est nulle, de plus la corde chute à la verticale, elle n'a donc pas d'accélération latérale. On effectue le même raisonnement qu'à la question 1

$$Z(G_2) = \frac{1}{2}\frac{z^2}{L} \qquad \text{avec} \qquad z = L - v_0 t$$

L'accélération instantanée du centre de masse G_2 est donc

$$\boxed{\overrightarrow{a}(G_2) = \frac{{v_0}^2}{L}\overrightarrow{e_z}}$$

4 L'égalité entre les deux accélérations n'est pas possible. En effet, dans le cas où la corde est tirée vers le haut (question 1), l'accélération du centre de masse contient une composante latérale qui n'est pas présente lorsque la corde chute (question 3). On doit donc considérer le cas où au départ la corde est en tas et non étalée comme indiqué sur la figure 2. Ainsi, il n'y a pas d'accélération latérale.

La descente et la montée sont identiques à un renversement du temps près. On effectue la transformation

$$t \leftrightarrow -t \quad \text{et} \quad \overrightarrow{r} \leftrightarrow \overrightarrow{r}$$

On a donc $$\overrightarrow{v} \leftrightarrow -\overrightarrow{v} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a} \leftrightarrow \overrightarrow{a}$$

(car l'accélération est une dérivée seconde de la position du centre de masse par rapport au temps). Ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{a}(G_1) = \overrightarrow{a}(G_2)}$$

Selon ce modèle, le point C est en contact avec la table donc, d'après l'énoncé, il est au repos, d'où

$$\boxed{\overrightarrow{a}(C) = \overrightarrow{0}}$$

Seconde expérience

5 La corde finit de chuter quand son extrémité supérieure B touche la table. B a un mouvement uniformément accéléré, ainsi

$$\overrightarrow{a}(B) = -g\overrightarrow{e_z}$$

Par projection suivant l'axe (Oz), on a alors

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g$$

En intégrant deux fois, compte tenu des conditions initiales,

$$\frac{dz}{dt}(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad z(0) = L$$