X Maths PC 2007 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Puyhaubert (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Pierre Bel (Doctorant en mathématiques), Walter Appel (Professeur en CPGE) et Paul Pichaureau (Professeur en CPGE).

Ce sujet traite principalement de courbes paramétrées, avec toute l'aide que peut apporter la théorie des séries de Fourier. On étudie certaines courbes du plan dont les équations paramétrées sont de la forme

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = f(t)\overrightarrow{u_t} + f'(t)\overrightarrow{v_t}$$

où $\overrightarrow{u_t}$ et $\overrightarrow{v_t}$ sont les vecteurs usuels du repère polaire. On montre notamment que, sous réserve que f respecte certaines conditions, la courbe obtenue satisfait une inégalité dite *isopérimétrique*, à savoir une inégalité faisant intervenir la longueur et l'aire de la courbe. Par ailleurs, le problème permet de montrer l'existence de courbes fermées qui ont le même diamètre apparent quel que soit l'angle suivant lequel elles sont regardées, sans pour autant être des cercles !

- La première partie est la plus abordable. Elle traite uniquement de fonctions 2π-périodiques et de séries de Fourier. Son principal objectif est de prouver quelques résultats utiles à l'étude des courbes réalisée dans la seconde partie. Seule la dernière question est délicate, et son résultat ne sert que pour les toutes dernières questions de la seconde partie.
- L'étude des courbes commence ensuite. Après quelques questions élémentaires, les choses difficiles s'annoncent. Les questions suivantes nécessitent soit des calculs compliqués, soit une bonne vision géométrique du problème. Il faut également utiliser les formules permettant de calculer l'aire de l'intérieur d'une courbe fermée, que sans doute peu de candidats ont l'habitude de manipuler. La difficulté en fin de problème est toutefois modérée, à l'exception de la dernière question.

Cet énoncé conforte la tendance actuelle de l'École polytechnique à produire des énoncés atypiques, où l'on évalue davantage la finesse de l'élève que sa connaissance des résultats du cours. Si certaines questions sont très faciles (à tel point qu'on peut se demander s'il n'y a pas de piège), d'autres nécessitent d'avoir développé une bonne intuition. Il est sans doute aisé de s'en sortir en récupérant des points sur les questions simples (à condition de les repérer) mais traiter l'énoncé en entier dans le temps imparti est une belle performance.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr .

Indications

Première partie

1 C'est du cours.

2 Trouver le noyau revient à résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

3.a Montrer que si f est dans $\mathrm{E}^{\perp}$, alors tous ses coefficients de Fourier sont nuls.

3.b Effectuer une intégration par parties dans le terme $(f'' \mid g)$ et utiliser la 2π-périodicité des fonctions f et g.

3.c Utiliser les résultats des deux questions précédentes.

4 Il s'agit de montrer que f est dans G si et seulement si ses coefficients de Fourier d'indices pairs sont tous nuls, à l'exception de $c_0(f)$ égal à $(f(0)+f(\pi))/2$.

Deuxième partie

5.a Montrer qu'il s'agit d'un cercle.

5.b Montrer que le vecteur dérivé de $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$ par rapport à t est non nul.

5.c Se servir de la formule classique qui donne la distance d'un point à une droite à partir d'une équation cartésienne de cette droite.

6 Déterminer les coordonnées cartésiennes de $\mathrm{M}(t)$ et montrer qu'elles satisfont une équation réduite bien connue d'une ellipse.

7.a Faire un raisonnement géométrique pour trouver un couple de coordonnées polaires du point $\mathrm{M}(t)$ (il est fortement suggéré de faire un dessin).

7.b Montrer que la fonction

$$g(t) = t + \mathrm{Arctan}\,\frac{f'(t)}{f(t)}$$

est strictement croissante sur $[\,0\,;2\pi\,]$ et que son image est un intervalle de longueur 2π.

8 Faire intervenir la formule donnant la longueur d'une courbe paramétrée, et remarquer que toutes les quantités intervenant dans celle-ci sont positives.

9.a Calculer l'aire de $\Omega(f)$ à l'aide de la formule suivante :

$$\mathrm{A}(f) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \det\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)\right)\,\mathrm{d}t$$

9.b Utiliser la formule de Parseval.

10 À l'aide du résultat précédent, montrer qu'on peut majorer la quantité $(\mathrm{P}(f)\,|\,f)$ par $|c_0(f)|^2$.

11 Calculer les coordonnées des points $\mathrm{M}(t)$ lorsque f est d'une forme qui satisfait l'égalité de la question précédente, ainsi que les conditions i) et ii).

12.a Utiliser la forme des éléments de Ker P obtenue à la question 2 et les résultats des questions 8 et 9.a.

12.b Étant donné la forme des éléments de Ker P établie à la question 2, calculer cette fois-ci les coordonnées du point $\mathrm{M}(t)$ obtenu pour la fonction $f+h$, par rapport à celui obtenu pour f.

13.a Même méthode qu'à la question 13.a.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr .

13.b Utiliser à nouveau les résultats des questions 8 et 9.*a*.

14.a Noter $\Pi(\mathrm{M})(t)$ le projeté orthogonal de $\mathrm{M}(t)$ sur D_θ. Commencer par exprimer ce vecteur en fonction de $\overrightarrow{u_\theta}$. Puis faire une étude de fonction de sa coordonnée $g_\theta(t)$ selon $\overrightarrow{u_\theta}$.

14.b S'appuyer sur le résultat de la question 4.

14.c Prendre un exemple de fonction qui ne satisfait pas les conditions de la question 4, tout en satisfaisant i) et ii). Pour prouver qu'il ne s'agit pas d'un cercle, prendre 4 points de la courbe et montrer qu'ils ne sont pas cocycliques.

15 Considérer un point M du segment $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$ et l'unique point d'intersection M^* de la demi-droite d'origine O et passant par M. Il faut alors établir que M appartient au segment OM^* (faire un dessin).

Pour cela, montrer que tous les points de la courbe sont du même coté de n'importe quelle tangente à Γ_f.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr .

Première partie

1 On sait que l'on a, par intégration par parties, les relations

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n^2 c_n(f) = -c_n(f'')$$

ce qui donne notamment les séries de Fourier suivantes

$$\boxed{\mathrm{S}(f'') = -\sum_n n^2 \left[c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_{-n}\right]}$$

où l'on a noté $e_n : t \longmapsto e^{int}$. Le fait que f soit de classe $\mathscr{C}^2$ assure par ailleurs que f est notamment de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, et donc que

$$\boxed{\text{La série de Fourier de } f \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}.}$$

> Rappelons que si f est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, alors
>
> $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad c_n(f') = -in\, c_n(f)$$
>
> Notre première relation découle de cette propriété appliquée à f, puis à f' lorsque f est de classe $\mathscr{C}^2$.

2 Le noyau de P est l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables et 2π-périodiques telles que

$$f + f'' = 0$$

L'équation ci-dessus est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. Les solutions sont de la forme

$$f : x \longmapsto a\cos x + b\sin x$$

où a et b sont deux réels fixés et sont bien 2π-périodiques. En d'autres termes,

$$\boxed{\mathrm{Ker\ P} = \mathrm{Vect}\ \{\sin, \cos\}}$$

> Attention à ne pas oublier que les fonctions considérées doivent nécessairement être 2π-périodiques. Le rapport du jury précise explicitement que les candidats ayant oublié cet argument ont été légèrement sanctionnés.

3.a Soit f un élément de $\mathrm{E}^\perp$ et $n \geqslant 1$ un entier. Notons f_n la fonction

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \sin(nx)$$

Il est clair que f_n est un élément de E. Par conséquent,

$$(f|f_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0$$

Remarquons alors que ce produit scalaire n'est autre que $b_n(f)$. On a donc montré que tous les coefficients de Fourier $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont nuls. De la même manière, la suite $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle. Or l'application, qui à une fonction f appartenant à F associe le couple $((a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}, (b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*})$, est injective sur F. Puisque f a les mêmes coefficients de Fourier que la fonction nulle, il vient finalement que f est nulle, d'où

$$\boxed{\mathrm{E}^\perp = \{0\}}$$

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr .