Mines Physique 2 MP 2007 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Pierre-Marie Billangeon (ESPCI) ; il a été relu par Arnaud Riegert (ENS Ulm) et Emmanuel Bourgeois (ENS Lyon).

Cette épreuve comporte un seul problème, composé de sept parties relativement indépendantes. Il est cependant indispensable de réussir la première partie, sans quoi on ne peut aller plus loin. C'est un sujet assez simple sur le plan des calculs, qui sont plutôt nombreux au demeurant mais jamais très difficiles. En revanche, il est nécessaire d'avoir développé un bon sens physique car les questions qualitatives sont nombreuses. Ces dernières ne doivent pas être négligées ; en effet, elles contribuent pour une part non négligeable à l'opinion que le correcteur se fait de la copie.

Le sujet traite des dispositifs mécaniques servant à stabiliser les grandes structures, telles que les gratte-ciels et les différents grands ouvrages de génie civil.

Dans la première partie, on s'attache à mettre en équation le problème : on définit deux fonctions de transfert, la première caractérisant le couplage entre une tour et un système d'absorption appelé *Tuned Mass Damper* (TMD), et la seconde permettant d'évaluer la sensibilité de l'édifice à une perturbation extérieure en présence du couplage avec le TMD. Puis, dans la deuxième partie, on étudie quelques cas limites : d'une part quand la tour et le TMD sont couplés de manière purement élastique, et d'autre part le cas opposé où ils sont couplés de façon rigide. On voit ensuite dans la troisième partie comment optimiser le choix des paramètres du couplage entre la tour et le TMD dans le cas général. Ceci conduit à s'intéresser aux ordres de grandeurs des principales variables du problème dans la quatrième partie. La cinquième partie étudie alors les limites du modèle adopté dans le problème, qui consiste à négliger la force de frottement fluide exercée sur la tour, approximation sans laquelle les calculs seraient relativement lourds. La sixième partie dresse une analogie avec l'électrocinétique qui permet de se ramener à un problème bien connu, celui du filtre passe-haut du second ordre ; enfin, on conclut par un calcul de la puissance dissipée, qui permet de se faire une idée de l'efficacité du dispositif.

Ce problème, de difficulté raisonnable, a le mérite d'aller au-delà de la stricte application du cours. Il constitue en cela un bon exercice de révision car il permet de tester son sens physique sur des exemples simples. Il s'agit en outre d'un sujet d'actualité en génie civil qui ne peut manquer d'intéresser de futurs ingénieurs.

Indications

Partie 1

1 Distinguer forces intérieures et forces extérieures pour le système {tour, TMD}.

2 Utiliser l'équation (**B2**). L'expression de β donnée dans l'énoncé est incorrecte. On a en fait

$$\beta = \frac{\omega_1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{1}{\alpha}\,\frac{k_1}{k}}$$

3 Utiliser l'équation (**B1**).

Partie 2

9 Penser à justifier l'existence de z_{R1} et z_{R2}. Pour montrer que $z_{\mathrm{R1}} < z_{\mathrm{AR}} < z_{\mathrm{R2}}$, distinguer le cas $\beta < 1$ du cas $\beta > 1$.

10 Il s'agit en fait de la valeur de z pour laquelle $|\underline{\mathrm{H}}_2|$ diverge.

Partie 3

12 Utiliser les résultats des questions 9 et 10.

Partie 4

15 Penser à passer en notation complexe pour cette question, afin de simplifier les calculs. Remarquer que l'énoncé impose une pulsation particulière $\omega = \omega_1$ pour l'excitation $a_0(t)$.

17 La valeur de α est maintenant de $0,014$.

Partie 5

18 Il faut redémontrer qu'en régime pseudo-périodique faiblement amorti, le facteur de qualité Q d'un oscillateur s'écrit

$$\mathrm{Q} = 2\pi\,\frac{\text{Énergie mécanique de l'oscillateur}}{\text{Énergie perdue pendant une période}}$$

Partie 6

21 Faire attention que l'énoncé donne les valeurs de β et ω_0, et non directement la valeur de ω_1.

Partie 7

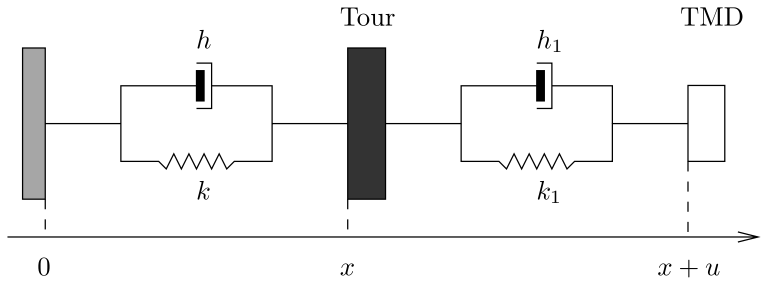
22 Se rappeler qu'en notation complexe

$$\langle a(t)\,b(t)\rangle_t = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\{\underline{a}(t)\,\underline{b}^\star(t)\}$$

Gratte-ciels et tours

1. Mise en équation

1 Rappelons le principe du TMD par un schéma.



Notons x_{G_1} l'élongation linéaire du centre de masse du système {tour,TMD}. En négligeant la force de frottement fluide φ qui s'applique sur la tour, le principe fondamental de la dynamique, appliqué dans le référentiel du sol supposé galiléen, conduit à

$$(m+m_1)\,\ddot{x}_{G_1} = -k\,x + f_0(t)$$

> Concernant le système {tour,TMD}, le bilan des forces ne prend en compte que les forces extérieures, c'est-à-dire les forces de rappel élastique f et de frottement fluide φ auxquelles est soumise la tour, ainsi que l'excitation f_0. Les forces f_1 et φ_1 qui s'exercent sur le TMD sont des forces intérieures.

L'abscisse du centre de masse x_{G_1} est reliée à celle du centre de masse de la tour x et à celle du centre de masse du TMD u par la relation

$$(m+m_1)\,x_{G_1} = m\,x + m_1\,(x+u)$$

Par conséquent, $$m\,\ddot{x} + m_1\,(\ddot{x}+\ddot{u}) = -k\,x + f_0(t)$$

Quant au seul système {TMD}, l'élongation de son centre de masse x_{G_2} n'est autre que $x+u$. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à ce système s'écrit alors

$$m_1\,(\ddot{x}+\ddot{u}) = -k_1\,u - h_1\,\dot{u}$$

On vient d'établir le système

$$\boxed{\begin{cases} m\,\ddot{x} + m_1\,(\ddot{x}+\ddot{u}) = -k\,x + f_0(t) \\ m_1\,(\ddot{x}+\ddot{u}) = -k_1\,u - h_1\,\dot{u} \end{cases}} \qquad [\mathbf{A}]$$

> L'expression donnée dans l'énoncé de la force de rappel élastique f_1 à laquelle est soumise le TMD comporte une erreur de signe. En fait,
>
> $$f_1 = -k_1\,u$$

Le système [**A**] peut se réécrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} (m+m_1)\,\ddot{x} + m_1\ddot{u} + k\,x = f_0(t) \\ m_1\,(\ddot{x}+\ddot{u}) + h_1\,\dot{u} + k_1\,u = 0 \end{cases}$$

On peut alors diviser les deux membres de la première équation par m, ainsi que ceux de la seconde par m_1, d'où l'on tire le système [**B**] :

$$\boxed{\begin{cases} (1+\alpha)\;\ddot{x} + \alpha\,\ddot{u} + {\omega_0}^2\,x = a_0(t) \quad \text{avec } \alpha = \dfrac{m_1}{m},\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \ \text{ et } \ a_0(t) = \dfrac{f_0(t)}{m} \\ \ddot{x} + \ddot{u} + 2\,\eta_1\,\omega_1\,\dot{u} + {\omega_1}^2\,u = 0 \qquad \text{avec } \omega_1 = \sqrt{\dfrac{k_1}{m_1}} \ \text{ et } \ \eta_1 = \dfrac{h_1}{2\sqrt{k_1\,m_1}} \end{cases}}$$

Les grandeurs ω_0 et ω_1 sont les pulsations propres respectives des systèmes {Tour} et {TMD} non couplés.

> La prise en compte d'une force de rappel élastique f dans le bilan des forces s'exerçant sur la tour est justifiée tant que l'on regarde de faibles déplacements x. On peut estimer grossièrement la constante de raideur k par un calcul d'élasticité des matériaux. Pour plus d'informations, on pourra consulter l'épreuve PSI X/ENS Modélisation 2006 publiée dans la collection *Annales des Concours*, tome PSI Physique-Chimie 2006.

2 En notation complexe, l'équation (**B2**) s'écrit

$$-\omega^2\,\underline{\mathrm{X}} - \omega^2\,\underline{\mathrm{U}} + 2\mathrm{i}\,\eta_1\,\omega_1\,\omega\,\underline{\mathrm{U}} + {\omega_1}^2\,\underline{\mathrm{U}} = 0$$

d'où

$$-\omega^2\,\underline{\mathrm{X}} = \omega^2\,\underline{\mathrm{U}} - 2\mathrm{i}\,\eta_1\,\omega_1\,\omega\,\underline{\mathrm{U}} - {\omega_1}^2\,\underline{\mathrm{U}}$$

On en déduit l'expression de la fonction de transfert $\underline{\mathrm{H}}_1$:

$$\underline{\mathrm{H}}_1(z) = \frac{\underline{\mathrm{U}}}{\underline{\mathrm{X}}} = \frac{-\omega^2}{(\omega^2 - {\omega_1}^2) - 2\mathrm{i}\,\eta_1\,\omega_1\,\omega}$$

En divisant le numérateur ainsi que le dénominateur par ${\omega_0}^2$, on trouve finalement

$$\boxed{\underline{\mathrm{H}}_1(z) = \frac{z^2}{(\beta^2 - z^2) + 2\mathrm{i}\,\eta_1\,\beta\,z} \qquad \text{où} \quad \beta = \frac{\omega_1}{\omega_0} \quad \text{et} \quad z = \frac{\omega}{\omega_0}}$$

La fonction de transfert $\underline{\mathrm{H}}_1(z)$ est une fonction complexe. Il faut bien entendu que $|\underline{\mathrm{H}}_1|$ soit le plus grand possible, car dans ce cas le TMD détourne de l'énergie et la tour est stabilisée : en effet, l'énergie élastique d'un oscillateur varie comme le carré du déplacement, et par conséquent plus $|\underline{\mathrm{H}}_1|$ est grand, plus le rapport entre l'énergie emmagasinée par le TMD et celle de la tour est important.

> Il y a une erreur dans l'énoncé concernant l'expression de β :
>
> $$\beta = \frac{\omega_1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}\,\frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{1}{\alpha}\,\frac{k_1}{k}}$$