X Maths 2 MP 2007 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tristan Poullaouec (Professeur agrégé) ; il a été relu par Rafik Imekraz (ENS Cachan) et Walter Appel (Professeur en CPGE).

Cette épreuve consiste en un sujet d'algèbre linéaire portant sur des triplets d'endomorphismes d'un espace vectoriel complexe X satisfaisant certaines relations de commutation. Il est constitué de quatre parties pouvant parfaitement être abordées indépendamment.

- Dans la première partie, on s'intéresse au lien entre la commutation d'endomorphismes de X et l'existence de sous-espaces vectoriels de X stables par ceux-ci.
- La deuxième partie est consacrée à l'étude de trois endomorphismes E_0, F_0 et K_0 définis explicitement par leur action sur une base de X. On établit quelques relations de commutation et l'on détermine ensuite les sous-espaces de X stables par ces endomorphismes.
- Enfin, dans la troisième puis la quatrième partie, on adopte la démarche inverse : partant des relations de commutation entre deux puis trois endomorphismes (qui sont en fait les relations établies au cours de la deuxième partie), on montre l'existence d'une base dans laquelle les endomorphismes considérés ont des expressions similaires à celles de E_0, F_0 et K_0.

Ce sujet est remarquablement court et d'un niveau de difficulté assez faible (surtout pour le concours d'entrée à l'École Polytechnique) : en particulier, les parties II et IV peuvent parfaitement être proposées à des élèves de Mathématiques Supérieures. Par ailleurs, les différentes questions sont globalement dépourvues d'originalité et ne requièrent aucune astuce particulière ; certaines se limitent même à des manipulations d'indice pures et simples. Tout ceci nous donne finalement un sujet peu intéressant et peu apte à départager clairement les candidats.

Indications

Première partie

1 Raisonner sur les espaces propres de A.

2.a Considérer un sous-espace propre de l'endomorphisme B.

2.b Construire un contre-exemple en dimension 2 en prenant pour A_1 et A_2 deux endomorphismes ayant un vecteur propre commun.

Deuxième partie

3 Évaluer cet endomorphisme en chaque vecteur de la base $(x_1, \ldots, x_n)$.

4 Effectuer une récurrence sur la dimension des sous-espaces stables par F_0.

7 Exploiter le résultat de la question 4.

Troisième partie

9 Raisonner par l'absurde en faisant usage de la seconde des relations établies précédemment.

10 Déduire de la question précédente le spectre de E.

11 Montrer d'abord que Ker E est stable par K.

12.b Utiliser le résultat de la question 10.

12.c Appliquer la relation $\mathrm{KE} = q^2\mathrm{EK}$ au vecteur x_2^0 .

Quatrième partie

14 Itérer la relation (iii).

16.a Exploiter le résultat de la question 14.

16.c Faire usage de la condition (v).

16.d Appliquer le résultat de la question 15 à l'entier $m = n + 1$.

Première partie

1 L'endomorphisme A admet dans la base $\mathcal{B} = (x_1, \ldots, x_n)$ une matrice diagonale de coefficients diagonaux deux à deux distincts ; il possède donc n valeurs propres distinctes et les sous-espaces propres associés sont les droites vectorielles $\mathbb{C}\, x_i$ pour $i \in [\![1\,;\, n]\!]$. Soit maintenant un endomorphisme B de X commutant à A : il laisse stable tout sous-espace propre de A. En effet, soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in \operatorname{Ker}(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{Id}\,)$; comme $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$, on a $\mathrm{A}(\mathrm{B}x) = \mathrm{B}(\mathrm{A}x) = \lambda \mathrm{B}x$ c'est-à-dire que $\mathrm{B}x \in \operatorname{Ker}(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{Id}\,)$. Ainsi,

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{B}(\operatorname{Ker}(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{Id}\,)) \subset \operatorname{Ker}(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{Id}\,)$$

Concernant la base $\mathcal{B}$, $\qquad \forall\, i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \mathrm{B}(x_i) \in \mathbb{C}\, x_i$

Ceci montre que $\mathcal{B}$ est également une base de vecteurs propres de B, dans laquelle cet endomorphisme est par conséquent représenté par une matrice diagonale. Ainsi,

> Tout endomorphisme B de X commutant à A est aussi représenté par une matrice diagonale dans la base $\mathcal{B}$.

2.a Supposons que les seuls sous-espaces de X stables par $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p$ soient $\{0\}$ et X, et considérons un endomorphisme B de X commutant à $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p$. Comme X est un espace vectoriel complexe, B est un endomorphisme scindé et il possède donc une valeur propre λ. L'espace propre associé $\operatorname{Ker}(\mathrm{B} - \lambda\,\mathrm{Id}\,)$ – qui n'est pas réduit au vecteur nul – est stable par $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p$ puisqu'ils commutent tous à B : c'est donc X. En conséquence, $\mathrm{B} = \lambda\,\mathrm{Id}$; ainsi,

> Si les seuls sous-espaces de X stables par $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p$ sont $\{0\}$ et X, alors tout endomorphisme B de X commutant à $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p$ est un multiple scalaire de l'identité.

> On a ici affaire à un cas particulier du lemme de Schur, qui intervient dans la théorie de la représentation des groupes.

2.b Pour construire un contre-exemple, fixons $n = p = 2$ et appelons A_1, A_2 les endomorphismes admettant pour matrices dans la base $\mathcal{B} = (x_1, x_2)$:

$$\mathrm{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit B un endomorphisme commutant avec A_1 et A_2. Comme A_1 admet dans la base $\mathcal{B}$ une matrice diagonale à coefficients distincts, on déduit de la question 1 que la matrice M de B dans la base $\mathcal{B}$ est également diagonale. Notons-la $\mathrm{M} = \operatorname{Diag}(a, b)$; la relation de commutation $\mathrm{BA}_2 = \mathrm{A}_2\mathrm{B}$ s'écrit alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{MM}_2 = \mathrm{M}_2\mathrm{M} \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathrm{MM}_2 = \mathrm{M}_2\mathrm{M} \quad &\Longleftrightarrow \quad a = b
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\qquad \mathrm{M} = a\,\mathrm{I}_2$ et $\mathrm{B} = a\ \mathrm{Id}$

Nous avons prouvé que tout endomorphisme B de X commutant à A_1 et A_2 est un multiple scalaire de l'identité. Cependant, la forme des matrices M_1 et M_2 montre clairement que la droite $\mathbb{C}\, x_1$ est stable par A_1 et A_2. Comme elle n'est égale ni à X ni à $\{0\}$ pour des raisons de dimensions, on peut alors en déduire que

$$\boxed{\text{La réciproque de la propriété établie à la question précédente est fausse.}}$$

> Pour montrer que cette réciproque est fausse, il nous faut considérer des endomorphismes laissant stable un sous-espace de X distinct de $\{0\}$ et de X : c'est ce qui nous a incité à étudier deux endomorphismes en dimension 2 possédant une droite propre ; il suffit pour cela de prendre les endomorphismes canoniquement associés à des matrices triangulaires supérieures.

Deuxième partie

3 Notons $L_0 = K_0F_0 - q^{-2}F_0K_0$. Par définition de F_0 et K_0, on a

$$K_0F_0(x_n) = K_0(0) = 0 \quad \text{et} \quad F_0K_0(x_n) = F_0(q^{1-n}x_n) = 0$$

d'où $L_0(x_n) = 0$. Prenons maintenant $p \in [\![1 \,;\, n-1]\!]$. Il vient

$$\begin{cases} K_0F_0(x_p) = K_0(x_{p+1}) = q^{n-1-2p}x_{p+1} = q^{-2}q^{n+1-2p}x_{p+1} \\ F_0K_0(x_p) = F_0(q^{n+1-2p}x_p) = q^{n+1-2p}x_{p+1} \end{cases}$$

si bien que $L_0(x_p) = 0$. Ainsi, l'endomorphisme L_0 envoie tous les vecteurs de la base $\mathcal{B} = (x_1, \ldots, x_n)$ sur le vecteur nul, ce qui permet d'affirmer que $L_0 = 0$ soit

$$\boxed{K_0F_0 - q^{-2}F_0K_0 = 0}$$

4 Par définition de F_0, on a

$$\text{Im } F_0 = \text{Vect}\,\{F_0(x_1), \ldots, F_0(x_n)\} = \text{Vect}\,\{x_2, \ldots, x_n\}$$

donc F_0 est de rang $n-1$. D'après le théorème du rang, Ker F_0 est de dimension 1 : comme il contient $x_n \neq 0$, alors Ker $F_0 = \text{Vect}\,\{x_n\}$. Enfin, il est clair que ${F_0}^n = 0$ par définition de cet endomorphisme.

Maintenant, considérons la propriété $\mathscr{P}$ définie pour $k \in [\![0 \,;\, n]\!]$ par $\mathscr{P}(k)$: « si le sous-espace A est stable par F_0 et de dimension k, alors A est le sous-espace vectoriel engendré par $(x_{n+1-k}, \ldots, x_n)$. »

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie puisque $A = \{0\} = \text{Vect}\,\varnothing$ lorsque $\dim A = 0$.
- $\underline{\mathscr{P}(k) \Longrightarrow \mathscr{P}(k+1)}$: supposons la propriété $\mathscr{P}$ vraie au rang $k \in [\![0 \,;\, n-1]\!]$ et considérons un sous-espace A stable par F_0 et de dimension $k+1$. Dans ce cas, $F_0(A) \subset A$ et donc $F_0\,(F_0(A)) \subset F_0(A)$. De surcroît, $F_0(A) = A$ implique

  $${F_0}^n(A) = A \neq \{0\}$$

  ce qui contredit la relation ${F_0}^n = 0$; par conséquent, on a $F_0(A) \subsetneq A$ et $\dim F_0(A) \leqslant k$. Le théorème du rang appliqué à ${F_0}_{|A}$ fournit

  $$\dim A = \dim F_0(A) + \dim \text{Ker } {F_0}_{|A} \leqslant \dim F_0(A) + \dim \text{Ker } F_0$$

  d'où $$\dim F_0(A) \geqslant \dim A - \dim \text{Ker } F_0 = k$$