ENAC Maths toutes filières 2006 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Perrier (ENS Cachan) ; il a été relu par David Lecomte (Université de Stanford) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Il est habituel que les sujets de l'ENAC portent sur la quasi-totalité du programme de mathématiques de PCSI (l'épreuve étant commune à toutes les filières). Ce concours intervenant tôt dans l'année, l'énoncé ne demande de traiter que les deux tiers des questions, afin qu'aucun candidat ne soit pénalisé par l'ordre dans lequel le programme est traité en cours. Le sujet comporte sept parties, d'importances inégales. On demande de traiter 24 des 36 questions proposées.

- La première partie propose neuf questions portant sur la transformation du plan complexe $z \longmapsto (z^2+1)/z^2$. Toutes les connaissances indispensables sur les nombres complexes sont passées au crible.
- Dans la deuxième, on propose trois questions sur l'équation différentielle
$$y'' = -\omega^2 y$$
- La troisième part également d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, mais propose surtout d'étudier en détail l'une des solutions de l'équation proposée.
- La quatrième propose, en quatre questions, de calculer trois intégrales. Toutes les propriétés classiques de l'intégrale sont passées en revue.
- La cinquième étudie des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients non constants. Cette partie demande des connaissances précises sur les équations différentielles.
- Dans la sixième, on étudie la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{x}\tan x$, et en particulier le comportement en l'infini de la suite des x_n telle que $x_n \in \left] -\dfrac{\pi}{2}+n\pi\,;n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\mathrm{e}^{x_n}\tan x_n = 1$.
- Enfin, la septième partie propose quatre questions simples d'algèbre linéaire.

Remarquons que d'après les programmes, les nombres complexes et les équations différentielles linéaires doivent être étudiées dès le début de l'année, ce qui signifie qu'à la période où le concours a lieu, les parties 1, 2, 3 et 5 doivent pouvoir être traitées dans leur totalité.

D'une manière générale, les QCM de l'ENAC sont des épreuves difficiles pour lesquelles il est indispensable de s'entraîner spécifiquement. Il faut notamment se méfier de la formulation précise des réponses proposées : on verra ainsi au long du corrigé que certaines réponses sont « presque » justes.

Notons enfin que le fait que la copie soit corrigée par un ordinateur et non par un professeur permet de sauter certaines questions en évitant d'agacer le correcteur. Rappelons cependant que traiter plusieurs questions liées permet de manipuler plusieurs fois les mêmes concepts et peut permettre de se rendre compte a posteriori de certaines erreurs.

Indications

Partie I

5 Si z est tel que $z^2 = 1/(\mathrm{Z}-1)$, calculer la forme cartésienne de z^2 en fonction de x et y, puis en fonction de X et Y.

6 Calculer le module de z^2.

7 Exprimer l'ensemble des affixes de la demi-droite de l'énoncé sous forme trigonométrique.

9 En prenant des points simples du cercle unité, montrer qu'aucune des propositions ne convient.

Partie II

10 Utiliser la structure d'espace vectoriel de S.

11 Exprimer y comme combinaison linéaire de $x \mapsto \sin(\omega x)$ et de $x \mapsto \cos(\omega x)$.

Partie III

15 Factoriser f par son terme dominant.

19 Afin d'exclure certaines réponses, on peut évaluer les expressions proposées et l'expression trouvée en certains points bien choisis.

Partie IV

22 Simplifier correctement l'expression des dérivées pour voir si celles–ci correspondent aux propositions de l'énoncé.

24 Les propositions demandent d'une part de calculer J−K en fonction de I, et ensuite de trouver une relation entre J et K. Pour cette dernière relation, effectuer une intégration par parties de J pour faire apparaître K.

25 Utiliser la valeur de I calculée question 23. Les relations trouvées à la question 24 ramènent alors le calcul de K et J à la résolution d'un système linéaire 2×2.

Partie V

28 Intégrer l'expression trouvée à la question 27.

31 Étudier le signe du polynôme $1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2$ pour obtenir le signe de f.

32 Pour les trois premières assertions, utiliser le théorème de la bijection. Pour la quatrième, commencer par poser $y_n = x_n - n\pi$. Remarquer d'abord que y_n converge vers 0, puis établir

$$y_n = \mathrm{Arctan}\left(e^{-n\pi - y_n}\right)$$

Utiliser les développements limités des fonctions Arctan et exp pour obtenir d'abord :

$$y_n = \mathrm{e}^{-n\pi + o(e^{-n\pi})}$$

Réinjecter cela dans l'équation $y_n = \mathrm{Arctan}\left(\mathrm{e}^{-n\pi - y_n}\right)$ pour obtenir un développement de y_n à l'ordre 2 en $e^{-n\pi}$. Itérer une troisième fois.

Partie VI

35 Montrer que le rang de f est égal à 2, puis utiliser le théorème du rang.

Partie I

1 Si $r\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}$ est la forme trigonométrique de z alors

$$\mathrm{Z} = \frac{z^2+1}{z^2} = 1 + \frac{1}{z^2} = 1 + \frac{\mathrm{e}^{\,-2\mathrm{i}\theta}}{r^2}$$

Dans les réponses proposées, seule la première correspond à une forme trigonométrique. Or d'après le calcul que l'on vient de faire, on voit immédiatement que $\mathrm{Z} \neq (1/r^2)\mathrm{e}^{\,-2\mathrm{i}\theta}$. On en déduit qu'aucune des réponses proposées ne convient.

> On voit, dès la première question, qu'il faut faire très précisément attention à la formulation des questions : ainsi, la proposition C correspond bien à une expression de Z, mais il ne s'agit pas d'une forme trigonométrique.

□	□	□	□	■
A	B	C	D	E

2 En continuant le calcul entamé à la question précédente, il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{Z} &= 1 + \frac{\mathrm{e}^{\,-2\mathrm{i}\theta}}{r^2} \\
&= 1 + \frac{\cos(-2\theta) + \mathrm{i}\sin(-2\theta)}{r^2} \\
\mathrm{Z} &= 1 + \frac{\cos(2\theta)}{r^2} - \mathrm{i}\,\frac{\sin(2\theta)}{r^2}
\end{aligned}$$

On en déduit que
$$\boxed{\mathrm{Re}\,(\mathrm{Z}) = 1 + \frac{\cos(2\theta)}{r^2}}$$

Les propositions B et C ne dépendent pas de r, et sont donc à rejeter. La proposition A correspond à $\mathrm{Re}\,(\mathrm{Z}) - 1$ et non à $\mathrm{Re}\,(\mathrm{Z})$, et la proposition D correspond à ce que l'on a trouvé.

□	□	□	■	□
A	B	C	D	E

3 D'après le calcul que l'on a fait à la question précédente,

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(\mathrm{Z}) = -\,\frac{\sin(2\theta)}{r^2}}$$

Donc seule la réponse C est juste.

□	□	■	□	□
A	B	C	D	E

4 On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Z}_0 = \frac{z^2+1}{z^2} &\iff \mathrm{Z}_0 = 1 + \frac{1}{z^2} \\
&\iff \mathrm{Z}_0 - 1 = \frac{1}{z^2} \\
\mathrm{Z}_0 = \frac{z^2+1}{z^2} &\iff z^2 = \frac{1}{\mathrm{Z}_0 - 1} \qquad \text{car } \mathrm{Z}_0 \neq 1
\end{aligned}$$

Notons $\alpha \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\beta}$ une forme trigonométrique de $1/(\mathrm{Z}_0 - 1)$. Alors l'équation trouvée admet notamment pour racine : $z = \sqrt{\alpha}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\beta/2}$. On en déduit que la réponse B convient et que la réponse A est fausse.

Par ailleurs, l'équation $z^2 = \alpha\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\beta}$ admet deux racines $\pm\sqrt{\alpha}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\beta/2}$. Ces deux racines sont confondues, si et seulement si $\sqrt{\alpha}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\beta/2} = -\sqrt{\alpha}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\beta/2}$, c'est-à-dire si $2\sqrt{\alpha}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\beta} = 0$. Cela n'est possible que si $\alpha = 0$, c'est-à-dire si $1/(\mathrm{Z}_0 - 1) = 0$, ce qui est impossible. On en déduit que l'équation (**H**) admet deux solutions distinctes.

A	B	C	D	E
$\square$	$\blacksquare$	$\square$	$\blacksquare$	$\square$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Calculons de deux manières différentes la forme cartésienne de z^2 : d'une part en utilisant la forme cartésienne de z, et d'autre part en utilisant la forme cartésienne de Z. D'un côté, on a

$$\begin{aligned} z^2 &= (x + \mathrm{i}y)^2 \\ &= x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy \end{aligned}$$

Par ailleurs
$$\begin{aligned} z^2 &= \frac{1}{\mathrm{Z} - 1} \\ &= \frac{\overline{\mathrm{Z}} - 1}{|\mathrm{Z} - 1|^2} \\ &= \frac{\mathrm{X} - \mathrm{i}\mathrm{Y} - 1}{(\mathrm{X} - 1)^2 + \mathrm{Y}^2} \\ z^2 &= \frac{\mathrm{X} - 1}{(\mathrm{X} - 1)^2 + \mathrm{Y}^2} - \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{Y}}{(\mathrm{X} - 1)^2 + \mathrm{Y}^2} \end{aligned}$$

Finalement
$$\boxed{\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \frac{\mathrm{X} - 1}{(\mathrm{X} - 1)^2 + \mathrm{Y}^2} \\ 2xy &= \frac{-\mathrm{Y}}{(\mathrm{X} - 1)^2 + \mathrm{Y}^2} \end{aligned}}$$

On en déduit que les assertions C et D sont exactes. Comme on sait qu'au plus deux réponses sont exactes, il n'est pas nécessaire de vérifier les deux autres.

A	B	C	D	E
$\square$	$\square$	$\blacksquare$	$\blacksquare$	$\square$

> Attention, la proposition A est un piège classique : il ne faut pas confondre l'ensemble
> $$\Big\{(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathbb{R}^2 \qquad (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \neq (1, 0)\Big\}$$
> qui correspond au plan $\mathbb{R}^2$ privé du point $(1, 0)$, et l'ensemble
> $$\Big\{(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathbb{R}^2 \qquad \mathrm{X} \neq 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{Y} \neq 0\Big\}$$
> qui correspond au plan $\mathbb{R}^2$ privé des droites $\mathrm{X} = 1$ et $\mathrm{Y} = 0$.