Centrale Physique PSI 2006 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Fourmond (ENS Ulm) ; il a été relu par Olivier Frantz (Professeur agrégé), Michel Fourmond (Enseignant en IUT) et Jean-Julien Fleck (Professeur en CPGE).

Ce sujet aborde le thème de l'énergie éolienne, qui est loin d'être neuf mais que les techniques et l'actualité remettent sur le devant de la scène. Il est composé d'une multitude de petites sous-parties, quasiment indépendantes les unes des autres et organisées autour de deux axes :

- La partie I traite des phénomènes en amont de l'éolienne. On commence par s'intéresser aux vents dominants et à ce qui les crée, puis on étudie la puissance qu'une hélice peut récupérer du vent, et on finit par une étude plus détaillée des pales des hélices.
- La partie II s'intéresse à la conversion de l'énergie mécanique en énergie électrique et à son utilisation. On y étudie successivement la génératrice, son circuit de commande, la régulation de la tension fournie, le stockage et l'utilisation proprement dite.

Le sujet dresse un panorama relativement complet du thème. La première partie constitue une bonne révision de la mécanique des fluides, tandis que la seconde mobilise une grande part du programme d'électronique. On peut cependant déplorer un certain nombre de coquilles, d'imprécisions ou d'oublis qui peuvent dérouter le candidat.

Indications

Partie I

I.A.2 Prendre $T = 293$ K comme température pour l'application numérique.

I.A.3 Supposer de plus que la masse volumique du gaz s'écarte très peu de sa valeur d'équilibre.

I.A.5 Chercher à obtenir une équation vectorielle, soit directement, soit en passant par les coordonnées cartésiennes.

I.A.7 Assimiler la portion de courbe entre 30° et 60° à une droite pour estimer le gradient. Calculer la masse volumique en prenant une température au sol de 293 K et une pression de 1 bar.

I.B.1 Écrire la conservation du débit sur le tube de courant.

I.B.2 Choisir un système fermé pour effectuer un bilan de quantité de mouvement.

I.B.3 Exprimer en fonction de S_R et non de S_E.

I.B.5 Prendre en compte les effets de la viscosité.

I.C.3 On supposera de plus que les forces sont dans le plan de la figure 7.

Partie II

II.A.6 Remarquer que sur chacun des intervalles considérés, le courant est une fonction monotone du temps.

II.B.1.a Ne garder que le terme d'ordre le plus bas pour i_e.

II.B.1.b Supposer de plus que $\Delta\Omega \ll \Omega_0$.

II.B.2.a RI est considéré comme une perturbation.

II.B.2.b Utiliser la formule de la question II.B.2.a, même si elle n'est plus applicable.

II.D.2 Partir d'une tension d'entrée très négative, en déduire V_+, puis observer ce qu'il se passe lorsque la tension d'entrée augmente puis redescend.

II.E.1 Ne pas oublier d'indiquer l'ordre du filtre.

II.E.3 Attention, la forme proposée par l'énoncé ne comporte que les termes en cosinus : choisir l'origine des temps pour que cela soit possible.

II.E.8 Déduire des valeurs données la résistance des lampes et l'impédance du moteur. En déduire l'impédance du circuit. On pourra modéliser l'impédance du moteur par un circuit RL parallèle.

I. Étude d'un aérogénérateur

A. Étude des vents dominants

I.A.1 On étudie une particule de masse $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}\tau$ de fluide dans le référentiel terrestre, non Galiléen. Elle est soumise à :

- son poids $\overrightarrow{\mathrm{P}} = m\,\overrightarrow{g} = \rho\,\overrightarrow{g}\ \mathrm{d}\tau$, qui inclut, par définition, les forces d'inertie d'entraînement ;
- la résultante des forces de pression $\overrightarrow{f}_{\text{pression}} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{P}\,\mathrm{d}\tau$;
- la force d'inertie de Coriolis $\overrightarrow{f}_{\text{i.C.}} = -2\,m\,\overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{v}$.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la particule, on obtient

$$\boxed{\rho\,\frac{\mathrm{D}\overrightarrow{v}}{\mathrm{D}t} = \rho\,\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{P} - 2\,\rho\,\overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{v}} \qquad (\mathbf{1})$$

I.A.2 Dans l'hypothèse d'une atmosphère au repos ($\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$), l'équation précédente se réduit à la relation de l'hydrostatique :

$$\rho_{\text{éq}}\,\overrightarrow{g} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{P}_{\text{éq}}$$

soit
$$\rho_{\text{éq}}\,g = \frac{\partial \mathrm{P}_{\text{éq}}}{\partial z} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \mathrm{P}_{\text{éq}}}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{P}_{\text{éq}}}{\partial y} = 0$$

On en déduit que $\mathrm{P}_{\text{éq}}$ ne dépend que de z. Relions maintenant $\rho_{\text{éq}}$ à $\mathrm{P}_{\text{éq}}$ à l'aide de la loi des gaz parfaits :

$$\mathrm{PV} = n\,\mathrm{RT}$$

soit
$$\mathrm{P}_{\text{éq}} = n\,\frac{\mathrm{RT}}{\mathrm{V}} = n\,\frac{\mathcal{M}}{\mathrm{V}}\,\frac{\mathrm{RT}}{\mathcal{M}} = \rho_{\text{éq}}\,\frac{\mathrm{RT}}{\mathcal{M}}$$

En reportant ceci dans l'équation précédente, on aboutit à

$$\frac{\mathrm{dP}_{\text{éq}}}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathcal{M}\,g}{\mathrm{RT}}\,\mathrm{P}_{\text{éq}}$$

ce qui s'intègre immédiatement en

$$\boxed{\mathrm{P}_{\text{éq}}(z) = \mathrm{P}_{\text{éq}}(0)\ \exp\left[-\frac{\mathcal{M}\,g\,z}{\mathrm{RT}}\right]}$$

On peut en déduire que l'atmosphère à une épaisseur de l'ordre de

$$\boxed{\frac{\mathrm{RT}}{\mathcal{M}\,g} = 8{,}6\ \mathrm{km}}$$

où l'on a pris $\mathrm{T} = 293$ K.

> Ne pas oublier de convertir $\mathcal{M}$ en kg.mol^{-1} pour les applications numériques.
>
> La taille de l'atmosphère donnée ici est celle pour laquelle la pression a diminué de 63 %.

I.A.3 L'équation (**1**) se réécrit

$$\rho\,\frac{\mathrm{D}\,\overrightarrow{v}}{\mathrm{D}\,t} = \rho\,\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\;p - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\;\mathrm{P}_{\text{éq}} - 2\,\rho\,\overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{v}$$

En utilisant la valeur de $\mathrm{P}_{\text{éq}}$ trouvée à la question précédente, cette équation devient

$$\rho\,\frac{\mathrm{D}\,\overrightarrow{v}}{\mathrm{D}\,t} = (\rho-\rho_{\text{éq}})\,\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\;p - 2\,\rho\,\overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{v}$$

Pour supprimer la dépendance en $\overrightarrow{g}$ comme demandé, il faut de plus supposer que $(\rho-\rho_{\text{éq}})\,\overrightarrow{g}$ est négligeable devant les autres termes. Ceci revient à supposer que la masse volumique de l'air s'éloigne peu de sa valeur d'équilibre. On obtient alors

$$\rho\,\frac{\mathrm{D}\,\overrightarrow{v}}{\mathrm{D}\,t} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\;p - 2\,\rho\,\overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{v}$$

ou encore

$$\boxed{\rho\left[\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\;)\,\overrightarrow{v}\right] = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\;p - 2\,\rho\,\overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{v}} \qquad (\mathbf{2})$$

> Les écoulements de ce type sont dits « stratifiés », car on peut alors considérer l'atmosphère comme un ensemble de couches de masses volumiques décroissantes qui ne se mélangent pas. Cette supposition est confirmée à la question I.A.5, où il est demandé de négliger les mouvements verticaux.

I.A.4 Pour un écoulement stationnaire, le terme d'accélération de l'équation (**2**) est de l'ordre de

$$\rho\,(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\;)\,\overrightarrow{v} \sim \rho\,\frac{\mathrm{U}^2}{\mathrm{L}}$$

La force de Coriolis vaut quant à elle

$$2\,\rho\,\overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{v} \sim \rho\,\Omega\,\mathrm{U}$$

On a donc

$$\boxed{\mathrm{Ro} = \frac{\rho\,\mathrm{U}^2/\mathrm{L}}{2\,\rho\,\Omega\,\mathrm{U}} = \frac{\mathrm{U}}{2\,\Omega\,\mathrm{L}} = 7.10^{-2}}$$

Si $\mathrm{Ro} \gg 1$, ce sont les termes de pression et d'accélération qui prédominent dans l'équation (**2**). En revanche, si $\mathrm{Ro} \ll 1$, le terme d'accélération devient négligeable devant la force de Coriolis. Pour les écoulements considérés, le terme d'accélération est clairement négligeable.

I.A.5 Dans le cas d'écoulements géostrophiques, l'équation (**2**) devient

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\;p + 2\,\rho\,\overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

Comme

$$\overrightarrow{\Omega} = -\Omega\cos\lambda\,\overrightarrow{e_x} + \Omega\sin\lambda\,\overrightarrow{e_z}$$

on a

$$\overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{v} = -\Omega\cos\lambda\,v_y\,\overrightarrow{e_z} + \Omega\sin\lambda\,(v_x\,\overrightarrow{e_y} - v_y\,\overrightarrow{e_x})$$

en négligeant v_z. En projetant l'équation (**2**) sur $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$, on obtient

$$2\,\rho\,\Omega\sin\lambda\,v_y = \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$2\,\rho\,\Omega\sin\lambda\,v_x = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

Ces deux équations peuvent se combiner simplement en

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \frac{1}{2\,\rho\,\Omega\sin\lambda}\,\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{\mathrm{grad}}\;p}$$