X Physique 1 PC 2006 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Benjamin Levrard (Chercheur au CNRS) ; il a été relu par Georges Rolland (Professeur agrégé) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Cette épreuve porte sur la propagation de signaux électriques dans diverses structures conductrices. Elle s'articule en trois parties, dont les deux premières sont relativement indépendantes entre elles. La troisième partie s'inscrit dans la continuité de la deuxième et il semble difficile de l'aborder sans avoir traité et compris les concepts physiques développés dans cette dernière.

- La première partie s'intéresse à la propagation des ondes électromagnétiques dans un câble coaxial composé d'une âme et d'une gaine conductrices. Après avoir déterminé certaines caractéristiques électrocinétiques en régime statique, la propagation et la structure des ondes TEM est ensuite étudiée. Une impédance caractéristique de la ligne est calculée pour déterminer finalement les propriétés de réflexion et les conditions d'adaptation d'impédance en bout de câble.
- La deuxième partie décrit la propagation d'un signal électrique dans une chaîne constituée de cellules LC discrètes. L'effet de retard et de dispersion des cellules sur un signal électrique, ainsi que le bilan énergétique au niveau d'une cellule sont étudiés. Si les aspects dispersifs sont au centre des questions, les analogies implicites avec la première partie visent à montrer qu'aux basses fréquences (ou aux grandes longueurs d'onde), le comportement du câble coaxial peut être simulé par une telle chaîne.
- Dans la troisième partie, on introduit une capacité non linéaire (appelée aussi « varicap ») dans la ligne à retard pour compenser la dispersion. La ligne permet alors la propagation d'ondes solitaires localisées de type solitons permettant de propager des signaux multifréquentiels sans déformation sur de très longues distances. La détermination des principales caractéristiques des solitons est alors proposée.

Ce problème met principalement en jeu les connaissances en électromagnétisme et physique ondulatoire du programme de PC. Il est assez caractéristique d'une épreuve de l'X, c'est-à-dire relativement long, de difficulté croissante mais bien formulé et construit. Certaines questions isolées sont plus difficiles et il convient de savoir les passer si on est bloqué trop longtemps.

Si les deux premières parties sont classiques et ont déjà été abordées précédemment dans de nombreuses autres épreuves de concours, la troisième est plus originale et porte sur une thématique (les ondes non linéaires) très en vogue. On peut cependant regretter que la multiplicité des questions proposées dans les parties I et II empêchent probablement une majorité de candidats d'aborder la partie III, pourtant la plus intéressante. Malgré l'évocation d'ondes non linéaires hors programme, aucune connaissance spécifique sur ce sujet n'est requise pour traiter cette partie, qui favorise le sens physique.

Indications

Partie I

I.1.6 Montrer que le champ magnétique est nul à l'extérieur de la gaine et à l'intérieur de l'âme.

I.1.9 Réutiliser le raisonnement de la question I.1.6 pour discuter la valeur de l'inductance totale. Le flux total a-t-il changé ?

1.2.1 Utiliser les formules vectorielles données par l'énoncé dans les équations de Maxwell pour relier les amplitudes des champs électrique et magnétique.

1.2.2 Calculer le double produit vectoriel $\overrightarrow{k} \wedge (\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{\mathrm{E}})$ de deux façons différentes.

1.2.3 Vérifier que les champs proposés satisfont bien les relations de passage aux différentes interfaces.

1.3.3 Relier, dans un premier temps, la vitesse de propagation v, calculée à la question I.2.2, avec les paramètres géométriques Λ et Γ. Dans un second temps, utiliser l'équation de Maxwell-Faraday sous sa forme intégrale sur le même contour orienté de la question I.1.6.

1.4.1 Exprimer les relations de continuité pour la tension et le courant en $z = 0$.

Partie II

II.2 Pour interpréter le résultat, effectuer un bilan des puissances échangées par la cellule n.

II.4.1 Interpréter l'évolution de la tension dans chaque cellule pour $\alpha = \pi$.

II.4.2 Utiliser la relation $e^{jx} - 1 = e^{jx/2}(e^{jx/2} - e^{-jx/2})$ et la relation de dispersion. Relier le rapport P/E avec la vitesse de groupe v_{g} trouvée à la question précédente.

Partie III

III.1.2 Considérer la capacité dynamique de la diode varicap $\mathrm{C(V) = dQ/dV}$.

III.2.2 Calculer le second membre de l'équation différentielle de la question III.2.1, en utilisant la formule trigonométrique donnée dans le formulaire.

III.2.3 Déterminer la valeur minimale de la fonction sh P/P.

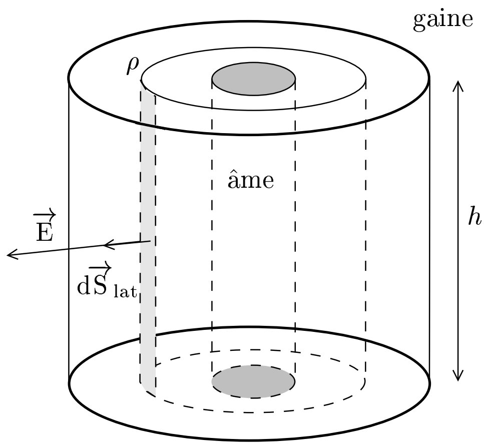
III.2.4 Estimer P à la calculatrice à partir de l'équation implicite trouvée à la question précédente.

Propagation de signaux électriques

I. Propagation dans un câble coaxial

1. Caractéristiques électriques du câble

I.1.1 Dans un premier temps, cherchons la structure spatiale du champ électrique. En considérant un câble coaxial infini, les deux plans contenant le point M et respectivement perpendiculaires et contenant l'axe du cylindre sont des plans de symétrie pour la distribution de charge. Le champ électrique en M, vecteur polaire, appartient donc à l'intersection de ces plans et est ainsi radial de la forme $\overrightarrow{\mathrm{E}} = \mathrm{E}_\rho(\rho,\theta,z)\,\overrightarrow{e_\rho}$. L'invariance de la distribution de charge par translation suivant l'axe Oz et par rotation autour de ce même axe indique en outre que l'amplitude du champ électrique est indépendante de z et de θ de sorte que $\overrightarrow{\mathrm{E}} = \mathrm{E}_\rho(\rho)\,\overrightarrow{e_\rho}$.



L'application du théorème de Gauss à un cylindre de rayon ρ (compris entre ρ_1 et ρ_2), de hauteur h passant par M et coaxial avec l'âme s'écrit

$$\oiint_{(\mathrm{S})} \overrightarrow{\mathrm{E}}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = \frac{\mathrm{Q_{int}}}{\varepsilon_0\,\varepsilon_r} = \frac{\mathrm{Q}\,h}{\varepsilon_0\,\varepsilon_r}$$

où la charge totale $\mathrm{Q_{int}}$ portée à l'intérieur du cylindre est $\mathrm{Q_{int}} = \mathrm{Q}\,h$. Le champ étant radial, son flux est nul sur les parties supérieures du cylindre. En découpant la surface latérale du cylindre en bandes élémentaires de hauteur h et d'angle dθ, chaque vecteur surface $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}}$ associé de norme $\mathrm{dS_{lat}} = h\,\rho\,\mathrm{d}\theta$ est aussi radial et colinéaire au champ électrique. Il vient alors

$$\oiint_{\mathrm{S}} \overrightarrow{\mathrm{E}}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = \iint_{\mathrm{S_{lat}}} \mathrm{E}_\rho(\rho)\,\mathrm{dS_{lat}} = \mathrm{E}_\rho(\rho)\iint_{\mathrm{S_{lat}}} \mathrm{dS_{lat}} = h\,\rho\,\mathrm{E}_\rho(\rho)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi\rho h\,\mathrm{E}_\rho(\rho)$$

soit, entre les conducteurs

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{E}}(\rho,\theta,z) = \mathrm{E}_\rho\overrightarrow{e_\rho} = \frac{\mathrm{Q}}{2\pi\rho\,\varepsilon_0\,\varepsilon_r}\,\overrightarrow{e_\rho}}$$

L'hypothèse d'un câble coaxial infini revient à négliger les effets de bord.

I.1.2 La circulation du champ électrique entre l'âme et la gaine s'écrit

$$\int_1^2 \overrightarrow{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \int_1^2 \overrightarrow{\mathrm{E}} \cdot (\mathrm{d}\rho\, \overrightarrow{e_\rho} + \rho\, \mathrm{d}\theta\, \overrightarrow{e_\theta}) = \int_1^2 \mathrm{E}_\rho(\rho)\, \mathrm{d}\rho$$

Or, $\overrightarrow{\mathrm{E}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{V}$, d'où

$$-\int_1^2 \mathrm{dV} = \mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_2 = \int_1^2 \overrightarrow{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \frac{\mathrm{Q}}{2\pi\, \varepsilon_0\, \varepsilon_r} \int_1^2 \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}$$

soit
$$\boxed{\mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_2 = \frac{\mathrm{Q}}{2\pi\, \varepsilon_0\, \varepsilon_r} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

I.1.3 En négligeant les effets de bord et en supposant que les conducteurs sont en influence totale, la capacité linéique Γ est donnée par $\mathrm{Q} = \Gamma\,(\mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_2)$. D'après la question précédente, il vient

$$\boxed{\Gamma = \frac{2\pi\, \varepsilon_0\, \varepsilon_r}{\ln(\rho_2/\rho_1)}}$$

I.1.4 Les valeurs numériques proposées pour le câble conduisent à

$$\boxed{\Gamma = 1,0.10^{-10}\ \ \mathrm{F.m^{-1}}}$$

puis à
$$\boxed{\mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_2 = \mathrm{Q}/\Gamma = 10\ \ \mathrm{V}}$$

D'après la question I.1.1, l'amplitude du champ électrique décroît avec la distance à l'axe des câbles. Dans le milieu isolant, le champ est donc maximum pour $\rho = \rho_1$; sa valeur est donnée par

$$\boxed{\mathrm{E}_{\max} = \frac{\mathrm{Q}}{2\pi\rho_1\, \varepsilon_0\, \varepsilon_r} = 1,6.10^4\ \ \mathrm{V.m^{-1}}}$$

I.1.5 Le plan contenant le point M et l'axe des cylindres étant un plan de symétrie pour la distribution de courant, le champ magnétique, vecteur axial, est perpendiculaire à ce plan et colinéaire au vecteur orthoradial $\overrightarrow{e_\theta}$. En outre, pour un câble supposé infini dont les effets de bord sont négligés, la distribution de courant est invariante par translation suivant l'axe Oz et par rotation d'un angle quelconque autour de cet axe. La composante orthoradiale du champ magnétique ne dépend donc pas des coordonnées z et θ de telle sorte que $\overrightarrow{\mathrm{B}}(\mathrm{M}) = \mathrm{B}_\theta(\rho)\, \overrightarrow{e_\theta}$.